К.Н. ВОЙНОВ

I. ВАРИАНТЫ РАБОТЫ С ОПЫТНЫМИ ДАННЫМИ

Использование табулированных случайных чисел

Если нам необходимо случайным образом выбрать какие-то номера чисел, которые далее будут соответствовать определённым значениям наблюдаемых в экспериментах/опытах величин, то это можно реализовать с помощью опубликованных в справочниках или книгах таблиц случайных чисел, имеющих конкретный вид распределения (например, равномерное, нормальное или др.). Таблица случайных чисел может быть сгенерирована и современными компьютерами. Первоначально воспользуемся примерами, взятыми из работы [1].

Для этого достаточно подробно покажем ситуацию, связанную с детерминированным использованием некоего среднего коэффициента трения в расчётах как в трибологических задачах, так и в расчётах моментов, сил и иных характеристик трения в деталях машин, механизмов и приборов. Коэффициент трения – не является длительной стабильной величиной, «бесконечной» константой, хотя во многих случаях расчётчики принимают этот коэффициент постоянным, что часто бывает некорректно.

Для дальнейших вычислений приведём сгенерированную компьютером (или взятую из ряда справочников) таблицу случайных чисел, имеющих равномерное распределение.

Перед каждым двузначным числом следует поставить 0 и запятую (например, 0,10; 0,09; 0,73...).

10 09 73 25 33 76 52 01 35 86 34 67 35 48 76 80 95 90 91 17
37 54 20 48 05 64 89 47 42 96 24 80 52 40 37 20 63 61 04 02

08 42 26 89 53 19 64 50 93 03 23 20 90 25 60 15 95 33 47 64
99 01 90 25 29 09 37 67 07 15 38 31 13 11 65 88 67 67 43 97

12 80 79 99 70 80 15 73 61 47 64 03 23 66 53 98 95 11 68 77

Пример 1.

Из книги «Трение, износ и смазка» под общей редакцией д.т.н. А.В. Чичинадзе (Москва, Машиностроение, 2003) возьмём приведённую в ней формулу для расчёта коэффициента трения $f_т$ при граничной смазке по Боудену:

$$f_т = \alpha_м f_м + (1 - \alpha_м) f_с,$$

где $f_м$ и $f_с$ – коэффициенты трения соответственно при чисто металлическом контакте и контакте через неповреждённую граничную смазочную плёнку; $\alpha_м$ – доля металлического контакта, увеличивающаяся с ростом температуры (примем её величиной постоянной 0,4, полагая, что температура не успевает сколько-нибудь значительно увеличиться).

Можно положить, что в полном объёме исходной информации все 100 приведённые коэффициенты трения условно относятся к значению $f_м$, а величину коэффициента $f_с$ можно принять и зафиксировать значением 0,1.

В данном же случае мы сократим исходное количество статистических данных по коэффициентам трения, взяв для $f1$ и $f2$ только первые две строки случайных чисел, входящих для рассматриваемого примера в блок равномерного распределения (рис. 1.1).

Кроме того, напомним, используя материалы книги Д. Кирьянова по самоучителю MathCAD 2001, смысл нескольких встроенных функций, которыми реализуются алгоритмы сглаживания исходных данных:

- ✓ medsmooth (*y*, *b*) – сглаживание алгоритмом «бегущих медиан»; при этой функции считается, что данные расположены равномерно;
- ✓ ksmooth (*x*, *y*, *b*) – сглаживание на основе функции Гаусса;
- ✓ supsmooth (*x*, *y*) – локальное сглаживание адаптивным алгоритмом, который в данном случае основан на анализе ближайших соседей каждой пары данных;

  - *x* – вектор действительных данных аргумента (для supsmooth его элементы должны быть расположены в порядке их возрастания);
  - *y* – вектор действительных значений того же размера, что и *x*;
  - *b* – ширина окна сглаживания.

Используя возможности компьютерной оболочки MathCad, напишем программу вычисления коэффициента трения $f_т$ для двух возможных вариантов, обозначенного здесь как $f1$и $f2$.

$i := 1..20$ $\quad j := 1..20$ $\quad \alpha := 0.4$ $\quad f1c := 0.1$ $\quad fm2 := 0.3$

$fm_i :=$ $\quad fc_j :=$

fm_i	fc_j
0.10	0.37
0.09	0.54
0.73	0.20
0.25	0.48
0.33	0.05
0.76	0.64
0.52	0.89
0.01	0.47
0.35	0.42
0.86	0.96
0.34	0.24
0.67	0.80
0.35	0.52
0.48	0.40
0.76	0.37
0.80	0.20
0.95	0.63
0.90	0.61
0.91	0.04
0.17	0.02

$$f1_i := \alpha \cdot fm_i + (1 - \alpha) \cdot f1c$$

$$f2_j := \alpha \cdot fm2 + (1 - \alpha) \cdot fc_j$$

$f1_i =$ $\quad f2_j =$

$f1_i$	$f2_j$
0.1	0.342
0.096	0.444
0.352	0.24
0.16	0.408
0.192	0.15
0.364	0.504
0.268	0.654
0.064	0.402
0.2	0.372
0.404	0.696
0.196	0.264
0.328	0.6
0.2	0.432
0.252	0.36
0.364	0.342
0.38	0.24

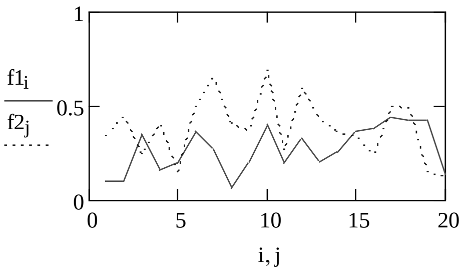


Рисунок 1.1 – Два варианта возможного изменения коэффициентов трения в динамике работы фрикционной пары

Все функции имеют в качестве аргумента векторы, составленные из массива данных; они выдают в качестве результата вектор сглаженных данных того же размера. На рис. 1.2–1.4 показаны варианты применения алгоритмов сглаживания для коэффициента *f*1 (усечено до 12 значений).

$$x := (1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5\ \ 6\ \ 7\ \ 8\ \ 9\ \ 10\ \ 11\ \ 12)^T$$

$$y := (0.10\ \ 0.09\ \ 0.73\ \ 0.25\ \ 0.33\ \ 0.76\ \ 0.52\ \ 0.01\ \ 0.35\ \ 0.86\ \ 0.34\ \ 0.67)^T$$

$z := \mathrm{supsmooth}(x, y)$ $\qquad s := \mathrm{cspline}(x, z)$ $\qquad A(t) := \mathrm{interp}(s, x, z, t)$

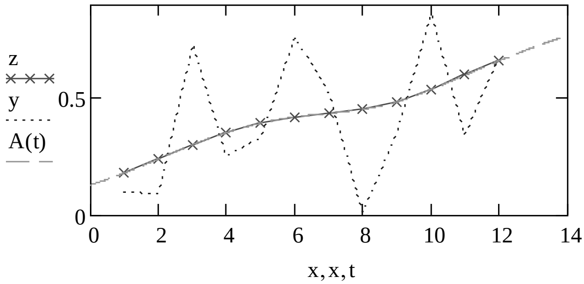


Рисунок 1.2 – Применение алгоритма расчёта с использованием адаптивного сглаживания данных

Пояснение: для набора двенадцати значений *x* и *y* после этих букв следует нажать одновременно две клавиши на клавиатуре компьютера Shift и Ж (или **:**, или **;** , которые расположены на одной клавише).

После появления знака присваивания вида **:=** следует вызвать падающее меню из командной строки MathCad «Матрицы».

Далее надлежит установить/назначить количество строк 1, а количество столбцов 12.

После этого в появившихся круглых скобках вводить имеющиеся числовые значения.

После завершения ввода всей информации надо очертить курсором всё содержимое, стоящее в круглых скобках, и в выпавшем меню «Матрицы» нажать указатель M^T.

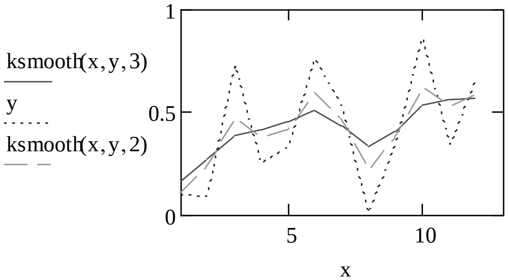


Рисунок 1.3 – Укрупнённое сглаживание с помощью функции ksmooth

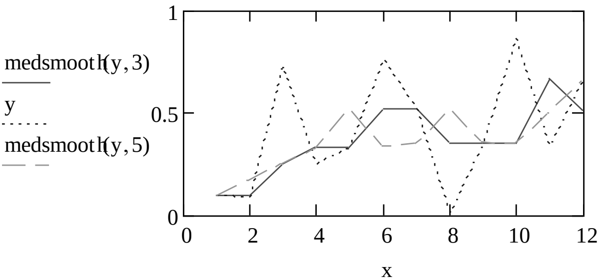


Рисунок 1.4 – Сглаживание «бегущими медианами»

До общего анализа возможного характера изменения в динамике коэффициента трения и его влияния на оценку трибологических и иных количественных характеристик приведём ещё несколько прикладных примеров. Для этого из того же литературного источника по трению, износу и смазке возьмём иную формулу по расчёту фактической площади касания $A_{r\text{ск}}$ при скольжении микронеровности:

$$A_{r\text{ск}} = (P_i/\text{HB})\cdot(1 + f^2)^{1/2}.$$

Здесь P_i – сила внешняя, действующая в сопряжении тело-контртело и создающая деформацию поверхностного слоя материала детали;

HB – твёрдость материала по Бринеллю; f – коэффициент трения.

<u>Пример 2</u>.

Для построения графика (рис. 1.5) возьмём одну следующую строчку из приведённого фрагмента таблицы случайных чисел с равномерным видом распределения, а именно:

08 42 26 89 53 19 64 50 93 03 23 20 90 25 60 15 95 33 47 64.

$i := 1 .. 20$

$f_i :=$

0.08
0.42
0.26
0.89
0.53
0.19
0.64
0.50
0.93
0.03
0.23
0.20
0.90
0.25
0.60
0.15
0.95
0.33
0.47
0.64

$P := 220 \qquad HB := 384$

$$A_i := \frac{P \cdot \sqrt{1 + (f_i)^2}}{HB}$$

$A_i =$

0.575
0.621
0.592
0.767
0.648
0.583
0.68
0.641
0.782
0.573
0.588
0.584
0.771
0.591
0.668
0.579

$$Ac := \frac{\left(\sum_{i=1}^{20} A_i\right)}{20} \qquad Ac = 0.648$$

$Amax := 0.782 \qquad Amin := 0.573$

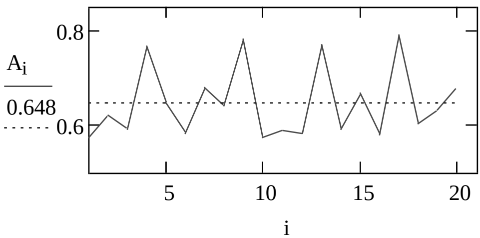


Рисунок 1.5 – Характер изменения фактической площади контакта (Ac – среднее значение; 0,782 – максимальное и 0,573 – минимальное) при изменении коэффициента трения f

Из графика рис. 1.5 видно, что вершин превышения площади контакта над средней линией встретилось 6 раз, а занижение было порядка 9 раз.

Пример 3.

По аналогичной схеме проанализируем формулу из книги [2] по определению силы запрессовки *F* детали для выбранной посадки:

$$F = \pi dlpf,$$

где d – посадочный диаметр;

l – длина посадочной поверхности;

p – давление от максимального натяга выбранной посадки;

f – коэффициент трения при прессовании.

Для расчёта силы запрессовки возьмём следующую строку из таблицы случайных чисел, которую используем для подстановки в коэффициент трения: 99 01 90 25 29 09 37 67 07 15 38 31 13 11 65 88 67 67 43 97.

При этом значения f_i (в столбик, как это было показано ранее) не приводим для экономии места. Итоговый график показан на рис. 1.6.

$i := 1..20$ $\quad d := 30 \quad l := 35 \quad p := 60$

$F_i := \pi \cdot d \cdot l \cdot p \cdot f_i$

$F_i =$

$1.959\cdot10^5$
$1.979\cdot10^3$
$1.781\cdot10^5$
$4.948\cdot10^4$
$5.74\cdot10^4$
$1.781\cdot10^4$
$7.323\cdot10^4$
$1.326\cdot10^5$
$1.385\cdot10^4$
$2.969\cdot10^4$
$7.521\cdot10^4$
$6.136\cdot10^4$
$2.573\cdot10^4$
$2.177\cdot10^4$
$1.286\cdot10^5$
$1.742\cdot10^5$

$$Fc := \frac{\sum_{i=1}^{20} F_i}{20} \qquad Fc = 8.897 \times 10^4$$

$$Fmax := 1.959 \cdot 10^5$$

$$Fmin := 1.385 \cdot 10^4$$

В книге рекомендовано в расчёт принимать коэффициент трения 0,20. Если подставить это значение в приведённую формулу, то получаем следующее значение силы запрессовки:

$$\pi \cdot 30 \cdot 35 \cdot 60 \cdot 0.2 = 3.958 \times 10^4$$

.

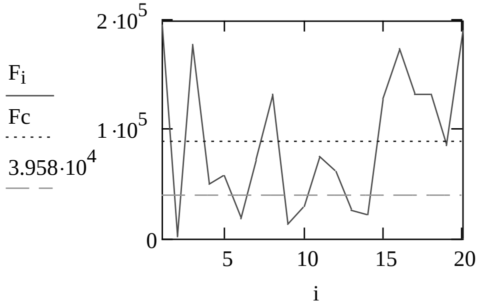


Рисунок 1.6 – График изменения силы запрессовки F_i при переменной величине коэффициента трения f_i и среднее значение Fc

Эта конечная величина не является здесь неким средним значением, но при потенциально возможных производственных колебаниях по коэффициенту трения следует этот факт учитывать.

В любом случае, величина коэффициента трения не будет постоянной, что приводит к рывкам при запрессовке, к возможным локальным перенапряжениям материала и даже к незначительным повреждениям сопрягаемых поверхностей.

Пример 4.

Формулу для анализа изменения работы W сил трения при вертикальном движении тела вдоль направляющего бруска возьмём из книги [3]:

$$W = Gl / (1 - f\text{tg}\alpha),$$

где G – сила тяжести от массы перемещающегося груза/тела;

l – путь перемещения тела;

F – сила, действующая на перемещаемое тело, под углом $\alpha = 18^{\circ}$;

f – коэффициент трения скольжения (в книге принят, что он равен 0,2).

Как и в предыдущих примерах, решение задачи выполним в компьютерной оболочке MathCad. Значения по возможной вариации коэффициента трения возьмём, как и ранее, из случайных чисел с равномерным законом распределения (из последней строки):

12 80 79 99 70 80 15 73 61 47 64 03 23 66 53 98 95 11 68 77.

Напомним, что вводимая в алгоритм расчёта величина h=0,017453 обеспечивает перевод градусов в радианы. Итоговый график – рис. 1.7.

$i := 1 .. 20$

$\alpha := 18 \qquad G := 390 \qquad l := 4 \qquad h := 0.017453$

$f_i :=$

0.12
0.80
0.79
0.99
0.70
0.80
0.15
0.73
0.61
0.47
0.64
0.03
0.23
0.66
0.53
0.98
0.95
0.11
0.68
0.77

$$W_i := \frac{G \cdot l}{1 - f_i \cdot \tan(\alpha \cdot h)}$$

$W_i =$

$1.623 \cdot 10^3$
$2.108 \cdot 10^3$
$2.099 \cdot 10^3$
$2.3 \cdot 10^3$
$2.019 \cdot 10^3$
$2.108 \cdot 10^3$
$1.64 \cdot 10^3$
$2.045 \cdot 10^3$
$1.946 \cdot 10^3$
$1.841 \cdot 10^3$
$1.97 \cdot 10^3$
$1.575 \cdot 10^3$
$1.686 \cdot 10^3$
$1.986 \cdot 10^3$
$1.885 \cdot 10^3$
$2.289 \cdot 10^3$

$Wmax := 2.289 \cdot 10^3$

$Wmin := 1.575 \cdot 10^3$

$fc := 0.587 \qquad \tan(18 \cdot h) = 0.325$

$Wc := 1.954 \cdot 10^3$

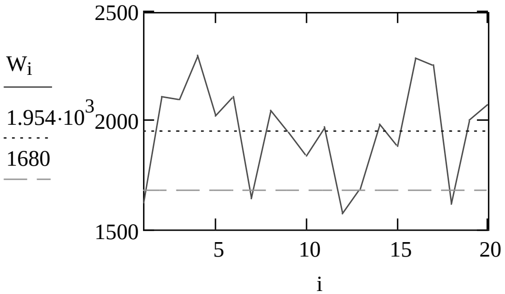


Рисунок 1.7 – Результат расчёта затрачиваемой работы W_i на перемещение тела при переменных значениях коэффициента трения f_i

Величина f_c – среднее значение коэффициента трения из используемых; *W*c – среднее значение работы в приведённом расчёте; *W*=1680 – значение работы, взятое из книги при фиксированном коэффициенте трения *f*=0,2.

<u>Пример 5</u>.

С учётом приводимых ниже дополнительных пояснений, покажем заметное различие в расчётах момента сил трения при относительном вращательном движении элемента пары трения, используя формулу:

$$M_T = fNr,$$

где N – нагрузка (или ответная реакция) в сопряжении кинематической пары; r – радиус вкладыша подшипника или самого вала.

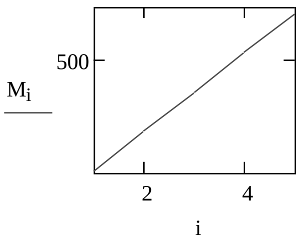
Используем программу в оболочке MathCad и построим график (рис. 1.8).

$i := 1..5$ $\qquad N := 220 \qquad r := 60$

$f_i :=$

0.01
0.02
0.03
0.04
0.05

$M_i := f_i \cdot N \cdot r$



$M_i =$

132
264
396
528
660

Рисунок 1.8 – Заметные изменения момента сил трения M_i (132…660) при возможных значениях коэффициента трения f от 0,01 до 0,05

В книге (Теория механизмов и машин; авторы: В. А. Юдин, Л. В. Петрокас) даны сведения о колебаниях и значениях коэффициентов трения:

- при полужидкостном трении у металлической пары со смазкой маслом – 0,01…0,05;
- при жидкостном трении у металлической пары со смазкой маслом и для пары трения металл-текстолит или древесная пластмасса в условиях хорошей смазки – 0,002…0,006;
- при жидкостном трении у пары металл-пластмасса со смазкой водой – 0,004…0,008.

То есть здесь мы видим размах варьирования для коэффициента трения двух-, трёх- и даже пятикратный! В практических расчётах это может приводить к существенным погрешностям, если не проводить специальные уточняющие исследования и эксперименты.

Коэффициенты трения/сопротивления *k* (размерность – см) при качении (*плечо трения*) приводятся следующие:

- дерево по дереву……………………0,05…0,06;
- дерево по стали……………………..0,03…0,04;
- ролики или шарики из закалённой стали по стали…..0,0005…0,0010.

Коэффициент *k* зависит от многих свойств материала катящейся пары трения (структуры, твёрдости, шероховатости и др.), от скоростных либо/и нагрузочных характеристик, от иных внешних условий качения. Например, считается, что при более твёрдой поверхности подвижных соприкасающихся тел коэффициент сопротивления качению уменьшается. Из приведённых выше значений следует, что и для условий качения коэффициент *k* не является абсолютно стабильным, имеет место достаточно широкий диапазон вариации числовых значений. Из выполненных примеров следует, что конечные значения рассчитываемых характеристик трибосистем при реально меняющихся коэффициентах трения могут быть принципиально различны. Для избежания значительных ошибок в расчётах по износостойкости, прочности, силовым и иным характеристикам объектов следует обязательно рассматривать все потенциально возможные изменения коэффициентов трения. Можно воспользоваться работой М. Кадырова «Таблицы случайных чисел», изд. Ср.-Аз. Гос. Университета, 1936 года или в публикации [4].

Пример 6. (Этот и следующий пример написаны совместно с профессором А.А. Алексеевым и аспирантом Е.П. Сороколетовым). Представим себе, что нас интересует площадь изолированной шероховатости, получившаяся либо при изготовлении поверхности детали, либо после некоторого времени работы пары трения. Будем использовать правую ветвь равносторонней гиперболы, описываемую следующими уравнениями:
$x = a \cdot \mathrm{ch}t$ и $y = a \cdot \mathrm{sh}t$, где ch и sh – соответственно обозначают гиперболический косинус и гиперболический синус, для вычисления которых используются следующие формулы:

$$\mathrm{ch}x = (e^x + e^{-x}) / 2 \text{ и } \mathrm{sh}x = (e^x - e^{-x}) / 2.$$

Величина a=0A и заштрихованная площадь, которую надлежит вычислить, показаны на рис. 1.9.

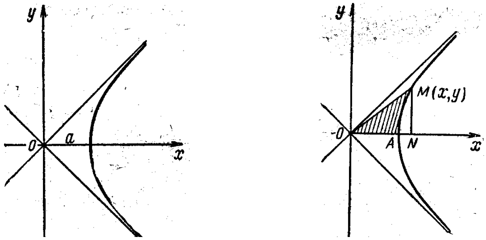


Рисунок 1.9 – Схемы для расчёта площади гиперболического сектора 0АМ

Решение. В общем виде можно записать так:

$$S = S_{0MN} - S_{AMN} = 0{,}5xy - \int_a^x y\,dx.$$

При этом имеем: $x = a\,\mathrm{ch}\,t$, $y = a\,\mathrm{sh}\,t$ и $dx = a\,\mathrm{sh}\,t\,dt$. Тогда вычисляем площадь:

$$S = 0{,}5a^2\mathrm{sh}\,t\cdot\mathrm{ch}\,t - a^2\int_0^t \mathrm{sh}^2 t\,dt = 0{,}5a^2\mathrm{sh}\,t\cdot\mathrm{ch}\,t - (a^2/2)\int_0^t(\mathrm{ch}2t - 1)\,dt =$$

$$= (1/4)a^2\mathrm{sh}2t - (1/4)a^2\mathrm{sh}2t + (a^2/2)t.$$

Ответ: $S = (a^2/2)t$.

Причём $t = 2S/a^2$. Следовательно, аргумент гиперболических функций t есть частное от деления удвоенной площади гиперболического сектора 0АМ на квадрат действительной полуоси.

Теперь, используя составленную программу в оболочке MathCad, рассчитаем условные (для примера) две площади, которые очерчены по схеме, представленной на рис. 1.9.
При этом будем считать, что размерность для величины a изолированной шероховатости измеряется в мкм и значения $a1 = 3$, а $a2 = 5$. Тогда вычисляемые площади обозначим соответственно через $S1$ и $S2$. Итоговый график этих площадей показан на рис. 1.10.

Изменение переменной величины t зададим в пределах от 0,1 до значения 30.

$i := 1..10$ $\quad t_i :=$ $\quad a1 := 3$ $\quad a2 := 5$

t_i
0.1
3
6
9
12
15
21
24
27
30

$$S1_i := \frac{a1^2 \cdot t_i}{2} \qquad S2_i := \frac{a2^2 \cdot t_i}{2}$$

$S1_i =$
0.45
13.5
27
40.5
54
67.5
94.5
108
121.5
135

$S2_i =$
1.25
37.5
75
112.5
150
187.5
262.5
300
337.5
375

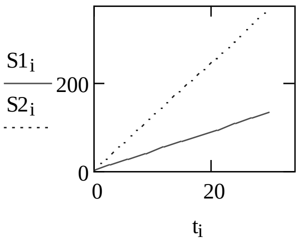


Рисунок 1.10 – Графический характер изменения площадей *S* гиперболического сектора, описывающего площадь шероховатости

Следующий объединённый график (рис. 1.11) показывает кривые гиперболических функций для sh*x*, ch*x*, th*x*, которые соответственно обозначены y1, y2 и y3, то есть гиперболический синус, гиперболический косинус и гиперболический тангенс. При этом напомним, что гиперболический косинус является чётной функцией, для которой имеем: ch(-*x*) = ch(*x*).

В свою очередь гиперболический синус, тангенс и котангенс являются нечётными функциями:

sh(-*x*)=-sh(*x*), th(-*x*)=-th(*x*), cth(-*x*)=-cth(*x*). В программе обозначено cth(*t*).

Кроме того, они обладают следующими свойствами: sh(0)=0, ch(0)=1,

$\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$, $\mathrm{th}(x) \cdot \mathrm{cth}(x) = 1$.

$x_i :=$

0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4

$$y1_i := \frac{e^{x_i} - e^{-x_i}}{2} \qquad y2_i := \frac{e^{x_i} + e^{-x_i}}{2} \qquad y3_i := \frac{e^{x_i} - e^{-x_i}}{e^{x_i} + e^{-x_i}}$$

$y1_i =$

0
0.201
0.411
0.637
0.888
1.175
1.509
1.904

$y2_i =$

1
1.02
1.081
1.185
1.337
1.543
1.811
2.151

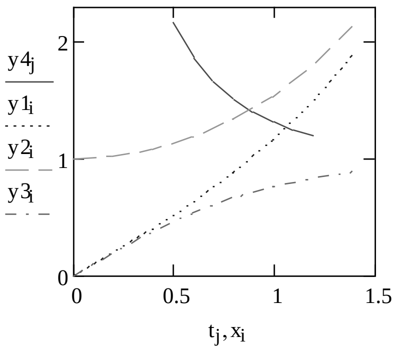
$y3_i =$

0
0.197
0.38
0.537
0.664
0.762
0.834
0.885

$t_j :=$

0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
1.1
1.2

$$y4_j := \frac{e^{t_j} + e^{-t_j}}{e^{t_j} - e^{-t_j}}$$



$y4_j =$

2.164
1.862
1.655
1.506
1.396
1.313
1.249
1.2

Рисунок 1.11 – Примеры графиков гиперболических функций: $y1_i$=sh(x), $y2_i$=ch(x), $y3_i$=th(x), $y4_j$=cth(t)

Для справки в общем виде про гиперболический котангенс:

$$\mathrm{cth}(x) = (\mathrm{sh}^2(x) + 1)^{1/2} / \mathrm{sh}(x).$$

Теперь первоначально приведём сведения о формуле полной вероятности и формуле Бейеса, чтобы далее решить несколько прикладных примеров.

В частности, если в экспериментах можно утверждать об n исключающих друг друга предположений/гипотез $H_1, H_2, \ldots, H_n$ и если некое событие A может осуществиться только при одной из этих ситуаций, то вероятность события A вычисляется *по формуле полной вероятности*:

$$P(A) = P(H_1)\, P(A \mid H_1) + P(H_2)\, P(A \mid H_2) + \ldots + P(H_n)\, P(A \mid H_n)\text{ , или}$$

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A \mid H_i),$$

где $P(H_i)$ – вероятность гипотезы H_i;
$P(A \mid H_i)$ – условная вероятность появления события A в конкретной гипотезе.

Если до проведения научных исследований (опытов) вероятности гипотез были $P(H_1)$, $P(H_2)$, …,$P(H_n)$, а при выполнении эксперимента появилось событие A, то с учётом данной ситуации условные вероятности гипотез вычисляются *по формуле Бейеса*:

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A|H_i)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Следовательно, формула Байеса позволяет сделать переоценку вероятностей гипотез с учётом полученного результата в эксперименте. Вероятности вида $P(H_1/A)$, вычисленные по приведённой формуле Бейеса, обычно называют *вероятностями гипотез*. Произведение соответствующих априорной и условной вероятностей равно совместной вероятности. Поэтому можно записать общее выражение:

$$P(A, B) = P(A \mid B)P(B) = P(B \mid A)P(A),$$

из которого ясно, что совместная вероятность двух событий всегда может быть изображена в виде произведения априорной вероятности одного из них и условной вероятности $P(A \mid B)$ другого при условии осуществления первого. Здесь событие A произошло при условии, что свершилось событие B. Условную вероятность $P(A \mid B)$ называют апостериорной, возникшей после проведения опыта.

Полная группа событий – несколько таких событий, когда в работе обязательно произойдёт хотя бы одно из них. Несколько событий в опыте являются *несовместными*, если никакие два из них не могут проявиться вместе. Если вероятность появления каждого события в опыте одинаковая, то все события называются *равновозможными*.

Если ряд событий образует полную группу из несовместных и равновозможных событий, то они называются *случаями/шансами*. В простейшем варианте, когда итоги опыта сводятся к схеме случаев, то вероятность события A рассчитывается по формуле: $P(A) = m/n$, где m – число случаев, благоприятствующих появлению события A; n – общее количество наблюдаемых случаев.

Напомним также следующие правила расчётов из теорем сложения и умножения вероятностей.

Теорема сложения вероятностей несовместных событий, при которой вероятность появления одного/любого из двух несовместных событий равна сумме вероятности этих событий:

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

При этом есть следствие. Вероятность появления любого одного из нескольких попарно несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий, то есть:

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_{\mathrm{n}}) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_{\mathrm{n}}).$$

Теорема сложения вероятностей совместных событий: вероятность появления лишь одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления. То есть:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Данный расчёт может быть обобщён на <u>любое количество совместных событий</u>. Например, для трёх совместных событий имеем:

$$P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC).$$

<u>По теореме умножения вероятностей независимых событий</u> имеем, что вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению вероятности этих событий:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B).$$

Кроме того, <u>вероятность появления сразу нескольких событий</u>, независимых в совокупности, равна произведению их вероятностей:

$$P(A_1 A_2 \ldots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n).$$

Напомним теперь теорему умножения вероятностей зависимых событий: вероятность совместного появления двух зависимых событий равна произведению одного из них на условную вероятность второго события.

То есть имеем:

$$P(AB) = P(A)^{\cdot}P_A(B),$$
$$P(AB) = P(B)^{\cdot}P_B(A).$$

Тогда из этого вытекает следующее следствие. Вероятность совместного появления нескольких зависимых событий равна произведению вероятности одного из них на условные вероятности всех остальных, причём вероятности каждого последующего события рассчитываются в предположении, что все предыдущие события уже свершились:

$$P(A_1A_2\ldots A_n) = P(A_1)^{\cdot}P_{A1}(A_2)^{\cdot}P_{A1A2}A_3^{\cdot}\ldots^{\cdot}P_{A1A2\ldots An\text{-}1}(A_n),$$

где $P_{A1A2\ldots An\text{-}1}$ – вероятность события A_n, вычисленная при условии, что все события A_1, A_2,…,$A_{n\text{-}1}$ наступили.

Пример 7.

Допустим, что есть три модуля/блока в объекте (программного обеспечения – «по»; электроники – «эл» и механики «мех»). Их центры тяжести плотностей вероятностей возникновения отказов показаны на рис. 1.12. *Примеры с 7 по 9 написаны с аспирантом Сороколетовым Е.П.*

При этом были приняты следующие обозначения:
S – площадь со своими индексами под кривой соответствующего закона распределения каждого блока в выбранных пределах анализа;
h – со своими индексами – высоты/расстояния до центра тяжести каждой плоскости; x и y – координаты вычисленных центров тяжестей.

Как было показано в международной энциклопедии по трибологии (том IX: Эффективная трибология при лезвийной и иной обработке заготовок/деталей /Под ред. проф. Войнова К.Н., 2015 г. – 260 с.), итоговые расчётные данные по блокам/модулям оказались следующие.
Для программного обеспечения (по):

$S_{\text{по}}$=0,3564; $h_{\text{по}}$=0,0756*10^{-3}; $x_{\text{с}}$=416,285; $y_{\text{с}}$=0,243*10^{-3};

для электроники (эл): $S_{\text{эл}}$=0,7695; $h_{\text{эл}}$=0,2053*10^{-3}; $x_{\text{с}}$=765,996; $y_{\text{с}}$=0,2600*10^{-3};

для механики (мех): $S_{\text{мех}}$=0,8547; $h_{\text{мех}}$=0,3772*10^{-3}; $x_{\text{с}}$=989,13; $y_{\text{с}}$=0,3652*10^{-3}.
Общий осреднённый центр тяжести имеет координаты:

$x_{\text{с}}$=799,33; y_c=0,3022*10^{-3}.

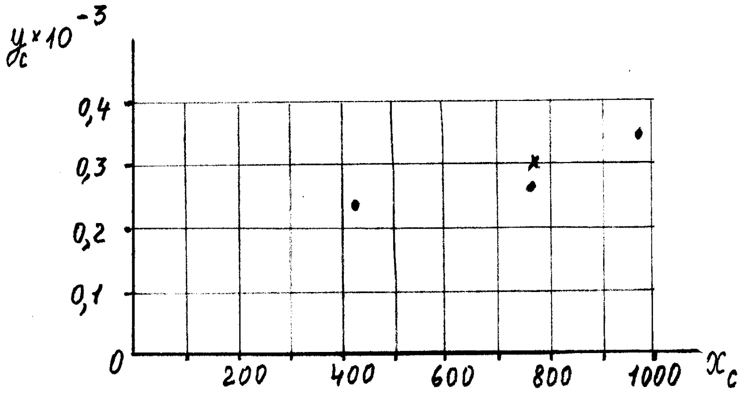


Рисунок 1.12 – Итоговый график: точками (слева направо) показаны координаты центров тяжестей для (по), (эл) и (мех); крестиком обозначено место расположения общего осреднённого центра тяжести

По оси абсцисс отложена наработка, по оси ординат – плотность вероятности возникновения отказов по трём модулям/блокам, считая, что они соединены последовательно.

Электрические сигналы из модуля 1 (Электроника) идут на модуль 2 (Программное обеспечение) и далее в блок 3 (исполнительная Механическая часть).

Анализ полученных данных показывает, что наибольшая надёжность ожидается у механической части (например, какие-то пары трения, достаточно долго без появления отказов будут медленно изнашиваться); блоки программного обеспечения и электроники имеют примерно одинаковую надёжность, хотя для программного обеспечения она несколько ниже.

Поэтому в первую очередь следует повысить наработку до отказа этих блоков конструкторско-технологическими способами. А если этого будет недостаточно для общей требуемой надёжности объекта, то и механический блок потребует соответствующих конструктивных и/или технологических усовершенствований. Используя сведения из высшей математики по формулам полной вероятности и формуле Бейеса, проведём следующие расчёты (примеры 7 и 8).

Итак, считаем, что есть три модуля/блока в объекте, каждый из которых

может работать только в двух режимах: нормальном и ненормальном.
При этом первый режим наблюдается в 90 % всех случаев работы объекта за фиксированную наработку, а 10 % оставшихся случаев относятся к «плохому» режиму. Допустим, что вероятность отказа блока («по») за расчётный период при нормальном режиме равна 0,05, а в ненормальном – 0,4; аналогично для блока («эл») соответственно имеем 0,1 и 0,6, а для последнего блока («мех») это 0,15 и 0,5.

Рассчитаем отдельные вероятности p при известности отказов по всем модулям/блокам объекта:

- для первого блока $p_1 = 0{,}9 \cdot 0{,}05 + 0{,}1 \cdot 0{,}4 = 0{,}045 + 0{,}04 = 0{,}085$;
- для второго блока $p_2 = 0{,}9 \cdot 0{,}1 + 0{,}1 \cdot 0{,}6 = 0{,}09 + 0{,}06 = 0{,}15$;
- для третьего блока $p_3 = 0{,}9 \cdot 0{,}1 + 0{,}1 \cdot 0{,}5 = 0{,}09 + 0{,}05 = 0{,}14$.

Тогда общая вероятность безотказной работы виртуального объекта составит:

$$P = 1 - p_1 p_2 p_3 = 1 - 0{,}001785 = 0{,}998.$$

Пример 8.

Предположим, что на запущенный на орбиту малогабаритный объект летят три небольших метеорита, которые потенциально могут испортить все его три модуля/блока независимо друг от друга. Пусть вероятность поражения $p = 0{,}6$. Определить вероятность того, что из трёх модулей/блоков два будут повреждены, то есть имеем следующие возможные гипотезы:

H_1 – все три модуля под угрозой попадания в них метеоритов;
H_2 – три метеорита могут попасть в один модуль;
H_3 – два метеорита попадают в наш виртуальный объект, а в третий метеорит не попадает.

Рассчитаем вероятность того, что из трёх модулей два выйдут из строя.
В частности, можно записать следующее:

$P(H_1) = 1 \cdot (2/3) \cdot (1/3) = 2/9 = 0{,}22(2)$;
$P(H_2) = 1 \cdot (1/3) \cdot (1/3) = 1/9 = 0{,}11(1)$;
$P(H_3) = 1 - (2/9) - (1/3) = 2/3 = 0{,}66(6)$;
$P(A \mid H_1) = 3p^2(1 - p)$; $P(A \mid H_2) = 0$; $P(A \mid H_3) = [1 - (1 - p)^2]p = p^2(2 - p)$;
$P(A) = 2p^2(1 - (2/3)p)$.

Подставив числовое значение p=0,6, находим, что $P(A) = 0{,}456$.

В приведённые формулы при вводе в модули/блоки резервирования можно повысить надёжность объекта даже при попадании метеоритов в отдельные элементы, из которых смонтирован тот или иной модуль/блок.

Пример 9.

Предположим, что в космос планируют запустить 10 миниатюрных спутников, 7 из которых старого типа, а 3 – модернизированные.

Рассчитать вероятность того, что при случайном выборе спутников из общего ангара для старта все они окажутся старого поколения.

Решение. Пусть A, B, C – как раз оказались взятыми старого типа спутники. Тогда вероятность того, что первый взятый мелкомодульный спутник был старой версии будет:

$$P(A) = 7/10 = 0,7.$$

Далее определим вероятность того, что и второй спутник оказывается старой моделью (это – условная вероятность для события B):

$$P_A(B) = 6/9 \approx 0,67.$$

Наконец, вероятность того, что и третий спутник окажется старой серии, когда первые были наугад уже взяты, будет (условная вероятность события C):

$$P_{AB}(C) = 5/8 = 0,625.$$

В итоге искомая вероятность того, что все 3 спутника были старой серии:

$$P(ABC) = P(A) \cdot P_A(B) \cdot P_{AB}(C) = 0,7 \cdot 0,67 \cdot 0,625 = 0,293.$$

Прежде чем приводить следующие примеры расчёта приведём информацию о числе сочетаний, достаточно часто используемых при анализе различных процессов/событий.

В частности, *сочетаниями* из n элементов по m называются их соединения, отличающиеся друг от друга только самими элементами. Например, сочетания из трёх элементов a, b, c по 2 будут: ab, ac, bc, что всегда в общем виде обычно записывается определённым способом.

При этом основное свойство сочетаний записывается так:

$$C_n^m = C_n^{n-m}, \quad C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

При этом числовое значение факториала, например, $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

Если наугад выбираем две детали из шести изготовленных, то спрашивается, а сколькими способами (сочетаниями) эти выборки можно сделать?

Решение: число вариантов равно числу сочетаний из шести деталей по две, то есть равно:

$$C_6^2 = \frac{6!}{2!4!} = \frac{5\cdot 6}{2!} = 15$$

Другая формула, которая может пригодиться в расчётах, это формула Бернулли: вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p ($0<p<1$), событие наступит ровно k раз в любой очерёдности, равна:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k},$$

или

$$P_n(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k},$$

где $q = 1 - p$.

Наконец, полезно знать следующие формулы для вычисления следующих вероятностей, что событие наступит *а*) менее k раз, *б*) более k раз, *в*) не менее k раз и г) не более k раз:

а) $P_n(0) + P_n(1) + \ldots + P_n(k-1);$
б) $P_n(k+1) + P_n(k+2) + \ldots + P_n(n);$
в) $P_n(k) + P_n(k+1) + \ldots + P_n(n);$
г) $P_n(0) + P_n(1) + \ldots + P_n(k).$

Приведём числовой пример для следующей задачи.

Имеются два равносильных спортсмена (возможные ничьи в расчёт не принимаются). Спрашивается: какова будет вероятность выиграть *а*) одну партию из двух или две партии из четырёх, либо *б*) не менее двух партий из четырёх или не менее трёх партий из пяти?

Ответы: для *а*) имеем $P_2(1) = ½$ и $P_4(2) = 3/8$; тогда для случая *б*) получаем: $P_4(2) + P_4(3) + P_4(4) = 1 – P_4(0) + P_4(1) = 11/16$ и $P_5(3) + P_5(4) + P_5(5) = 8/16$.

Не менее полезными на практике являются *применения локальной и интегральной теорем Лапласа*.

В частности, первая теорема формулируется так: вероятность того, что при выполнении n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события равна p ($0<p<1$), событие наступит ровно k раз и безразлично, в какой очерёдности, то эта вероятность приближённо будет равна:

$$P_n(k)=\frac{1}{\sqrt{npq}}\,\varphi(x).$$

Здесь q – вероятность отсутствия ожидаемого события ($p + q = 1$).
При этом имеем:

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-x^2/2},\quad x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}.$$

Таблица 1 табулированной функции φ(x) для положительных значений x приведена ниже; для отрицательных значений x используют эту же таблицу, так как функция φ(x) – чётная, следовательно, φ(-x) = φ(x).

<u>Пример 10</u>. Определить вероятность того, что событие C произойдёт ровно 20 раз в 120 испытаниях, если вероятность появления данного события в каждом испытании равна 0,2.
Решение. Имеем: n=120, k=40, p=0,2, q=0,8. Число опытов – достаточно большое, то будем использовать локальную теорему Лапласа, для которой вычисляем величину x = (20–120·0,2)/(120·0,2·0,8)$^{1/2}$ = -0,91.
Учитывая, что φ(-0,91) = φ(0,91) и данные табл. 1, получаем табулированную функцию φ(x=0,91) = 0,2637. Тогда искомая расчётная вероятность будет:

$$P_{120}(20) = 1\cdot 0{,}2637 / 4{,}38 = 0{,}06.$$

Таблица 1 – Значения для функции φ(x) = (1/√(2π))·exp(-x^2/2)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551

2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264.	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Пример 11. Рассчитать вероятность того, что событие проявится в следующих трёх случаях: *а*) не менее 75 раз и не более 90 раз; *б*) не менее 75 раз и *в*) не более 74 раз, если число независимых опытов было 95, а вероятность появления события в каждом эксперименте была постоянна и равна p=0,8. Для решения задачи используем интегральную теорему Лапласа.

В первом случае имеем: n=95; p=0,8; противоположное событие отвечает вероятности q=0,2; k_1= 75, k_2= 90. Вычислим значения:

$x' = (k_1 - np) / (npq)^{1/2} = (75 - 95 \cdot 0,8) / (95 \cdot 0,8 \cdot 0,2)^{1/2} = -1 / 3,899 = - 0,256;$

$x'' = (k_2 - np) / (npq)^{1/2} = (90 - 95 \cdot 0,8) / (95 \cdot 0,8 \cdot 0,2)^{1/2} = 14 / 3,899 = 3,591.$

Так как функция Лапласа нечётная, то Ф(-x) = -Ф(x), тогда получим:

$$P_{95}(75;90) = Ф(3,591) – Ф(-0,252) = Ф(3,591) + Ф(0,252).$$

Ответы для записанных в круглых скобках величин функции Ф() найдём, используя табл. 2 и $P_n(k_1; k_2) = Ф(x'') – Ф(x')$.

Таблица 2 – Значения функции вида:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-x^2/2}\,dx$$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,32	0,1255	0,64	0,2389	0,96	0,3315
0,01	0,0040	0,33	0,1293	0,65	0,2422	0,97	0,3340
0,02	0,0080	0,34	0,1331	0,66	0,2454	0,98	0,3365
0,03	0,0120	0,35	0,1368	0,67	0,2486	0,99	0,3389
0,04	0,0160	0,36	0,1406	0,68	0,2517	1,00	0,3413
0,05	0,0199	0,37	0,1443	0,69	0,2549	1,01	0,3438
0,06	0,0239	0,38	0,1480	0,70	0,2580	1,02	0,3461
0,07	0,0279	0,39	0,1517	0,71	0,2611	1,03	0,3485
0,08	0,0319	0,40	0,1554	0,72	0,2642	1,04	0,3508
0,09	0,0359	0,41	0,1591	0,73	0,2673	1,05	0,3531
0,10	0,0398	0,42	0,1628	0,74	0,2703	1,06	0,3554
0,11	0,0438	0,43	0,1664	0,75	0,2734	1,07	0,3577
0,12	0,0478	0,44	0,1700	0,76	0,2764	1,08	0,3599
0,13	0,0517	0,45	0,1736	0,77	0,2794	1,09	0,3621
0,14	0,0557	0,46	0,1772	0,78	0,2823	1,10	0,3643
0,15	0,0596	0,47	0,1808	0,79	0,2852	1,11	0,3665
0,16	0,0636	0,48	0,1844	0,80	0,2881	1,12	0,3686
0,17	0,0675	0,49	0,1879	0,81	0,2910	1,13	0,3708
0,18	0,0714	0,50	0,1915	0,82	0,2939	1,14	0,3729
0,19	0,0753	0,51	0,1950	0,83	0,2967	1,15	0,3749
0,20	0,0793	0,52	0,1985	0,84	0,2995	1,16	0,3770
0,21	0,0832	0,53	0,2019	0,85	0,3023	1,17	0,3790
0,22	0,0871	0,54	0,2054	0,86	0,3051	1,18	0,3810
0,23	0,0910	0,55	0,2088	0,87	0,3078	1,19	0,3830
0,24	0,0948	0,56	0,2123	0,88	0,3106	1,20	0,3849
0,25	0,0987	0,57	0,2157	0,89	0,3133	1,21	0,3869
0,26	0,1026	0,58	0,2190	0,90	0,3159	1,22	0,3883
0,27	0,1064	0,59	0,2224	0,91	0,3186	1,23	0,3907
0,28	0,1103	0,60	0,2257	0,92	0,3212	1,24	0,3925
0,29	0,1141	0,61	0,2291	0,93	0,3238	1,25	0,3944
0,30	0,1179	0,62	0,2324	0,94	0,3264		
0,31	0,1217	0,63	0,2357	0,95	0,3289		

В частности, $\Phi(3{,}591) = 0{,}499$; $\Phi(0{,}252) = 0{,}099$.

Тогда расчётное значение вероятности для случая *а*) будет:

$$P_{95}(75;\ 90) = 0{,}499 + 0{,}099 = 0{,}598.$$

Теперь исследуем вариант *б*), в котором событие может появляться 75, 76, 77,… и максимально 95 раз.

Тогда запишем, что n=95; p=0,8; противоположное событие отвечает вероятности q=0,2; k_1= 75, k_2= 95. В итоге имеем:

$x^{/} = (k_1 - np) / (npq)^{1/2} = (75 - 95{\cdot}0{,}8) / (95{\cdot}0{,}8{\cdot}0{,}2)^{1/2} = -1 / 3{,}899 = -\ 0{,}256;$
$x^{//} = (k_2 - np) / (npq)^{1/2} = (95 - 95{\cdot}0{,}8) / (95{\cdot}0{,}8{\cdot}0{,}2)^{1/2} = 19 / 3{,}899 = 4{,}873.$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,26	0,3962	1,59	0,4441	1,92	0,4726	2,50	0,4938
1,27	0,3980	1,60	0,4452	1,93	0,4732	2,52	0,4941
1,28	0,3997	1,61	0,4463	1,94	0,4738	2,54	0,4945
1,29	0,4015	1,62	0,4474	1,95	0,4744	2,56	0,4948
1,30	0,4032	1,63	0,4484	1,96	0,4750	2,58	0,4951
1,31	0,4049	1,64	0,4495	1,97	0,4756	2,60	0,4953
1,32	0,4066	1,65	0,4505	1,98	0,4761	2,62	0,4956
1,33	0,4082	1,66	0,4515	1,99	0,4767	2,64	0,4959
1,34	0,4099	1,67	0,4525	2,00	0,4772	2,66	0,4961
1,35	0,4115	1,68	0,4535	2,02	0,4783	2,68	0,4963
1,36	0,4131	1,69	0,4545	2,04	0,4793	2,70	0,4965
1,37	0,4147	1,70	0,4554	2,06	0,4803	2,72	0,4967
1,38	0,4162	1,71	0,4564	2,08	0,4812	2,74	0,4969
1,39	0,4177	1,72	0,4573	2,10	0,4821	2,76	0,4971
1,40	0,4192	1,73	0,4582	2,12	0,4830	2,78	0,4973
1,41	0,4207	1,74	0,4591	2,14	0,4838	2,80	0,4974
1,42	0,4222	1,75	0,4599	2,16	0,4846	2,82	0,4976
1,43	0,4236	1,76	0,4608	2,18	0,4854	2,84	0,4977
1,44	0,4251	1,77	0,4616	2,20	0,4861	2,86	0,4979
1,45	0,4265	1,78	0,4625	2,22	0,4868	2,88	0,4980
1,46	0,4279	1,79	0,4633	2,24	0,4875	2,90	0,4981
1,47	0,4292	1,80	0,4641	2,26	0,4881	2,92	0,4982
1,48	0,4306	1,81	0,4649	2,28	0,4887	2,94	0,4984
1,49	0,4319	1,82	0,4656	2,30	0,4893	2,96	0,4985
1,50	0,4332	1,83	0,4664	2,32	0,4898	2,98	0,4986
1,51	0,4345	1,84	0,4671	2,34	0,4904	3,00	0,49865
1,52	0,4357	1,85	0,4678	2,36	0,4909	3,20	0,49931
1,53	0,4370	1,86	0,4686	2,38	0,4913	3,40	0,49966
1,54	0,4382	1,87	0,4693	2,40	0,4918	3,60	0,499841
1,55	0,4394	1,88	0,4699	2,42	0,4922	3,80	0,499928
1,56	0,4406	1,89	0,4706	2,44	0,4927	4,00	0,499968
1,57	0,4418	1,90	0,4713	2,46	0,4931	4,50	0,499997
1,58	0,4429	1,91	0,4719	2,48	0,4934	5,00	0,499997

Из табл. 2 находим:

$$\Phi(0{,}256) = 0{,}1; \quad \Phi(4{,}873) \approx 0{,}5.$$

В итоге ответ по рассчитанной вероятности будет такой:

$$P_{95}(75;95) = \Phi(4{,}873) - \Phi(-0{,}256) = 0{,}5 + 0{,}1 = 0{,}6.$$

Теперь решаем третий случай, когда событие A появилось не более 70 раз и A появилось не менее 71 раза.

Здесь эти события противоположны, следовательно, искомая вероятность будет:

$P_{95}(0;70) = 1 – P_{95}(75;95) = ?$, что сосчитать, уважаемому читателю, в плане тренировки не представляет сделать самому.

В общем виде использовались следующие формулы:

$$x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}. \qquad P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x), \qquad x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}.$$

<u>Пример 12</u>. Допустим, что вероятность события в каждом из независимых испытаний равна 0,8. Определить, какое количество нужно выполнить тестов, чтобы с вероятностью 0,9 можно было бы ожидать, что требуемый результат (событие) появится не менее 70 раз?

Решение выполним, используя интегральную теорему Лапласа. При этом имеем такие исходные данные: p=0,8; q = 0,2; k_1= 70; k_2=n; P_n = (70, n) = 0,9. Запишем формулу, используя интегральную теорему Лапласа:

$$P_n(k_1;\, n) = \Phi(x'') – \Phi(x') = \Phi[(k_2 – np) / \sqrt{(npq)}] – \Phi[(k_1 – np) / \sqrt{(npq)}].$$

Подставим исходные числовые значения:

$0{,}9 = \Phi[(n – 0{,}8n) / \sqrt{(n\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2)}] – \Phi[(70 – 0{,}8n) / \sqrt{(n\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2)}]$.

Решая это выражение и находя, что $0{,}9 = \Phi[\sqrt{n} / 2] – \Phi[(70 – 0{,}8n)/(0{,}4\sqrt{n})]$, получаем, что $0{,}9 = 0{,}5 – \Phi[(70 – 0{,}8n)/0{,}4\sqrt{n}]$. Следовательно, так как число опытов n будет более 70, то имеем: $\sqrt{n} / 2 > \sqrt{70} / 2 \approx 4{,}18$. Так как функция Лапласа – возрастающая, а $\Phi(4) \approx 0{,}5$, то $\Phi(\sqrt{n} / 2) = 0{,}5$.

Тогда можно записать, что $0{,}9 = 0{,}5 – \Phi[(70 – 0{,}8n)/(0{,}4\sqrt{n})]$.

Откуда находим, что $[(70 – 0{,}8n)/(0{,}4\sqrt{n})] = – 0{,}4$.

Из табл. 2 находим, что $\Phi(1{,}28) = 0{,}4$.

Так как функция Лапласа нечётная, то получаем: $(70 – 0{,}8n)/(0{,}4\sqrt{n}) = – 1{,}28$.

В итоге, решив уравнение, получим, что число тестов $n \approx 82$.

<u>Пример 13</u>. Прежде чем формулировать условие задачи, о которой пойдёт речь, напомним правило и дадим формулу для анализа отклонения относительной частоты от постоянной вероятности в независимых опытах.

Итак, вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления конкретного события p находится в пределах $0 < p <1$, абсолютная величина отклонения относительной частоты появления события от вероятности появления его не превышает положительного числа ε будет приближённо равна удвоенной функции Лапласа при $x = \varepsilon\sqrt{(n/pq)}$:

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right| \leqslant \varepsilon\right) \simeq 2\Phi\left(\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Теперь перейдём собственно к числовому примеру.
Пусть вероятность появления события в n = 225 независимых экспериментах равна p =0 ,8; для противоположного события q = 0,2. Требуется определить вероятность того, что относительная частота появления события отклонится от его вероятности по абсолютной величине не более чем на ε = 0,04.
Решение. Воспользуемся выше приведённой формулой. Тогда имеем:

$$P(\left|((m/225) - 0{,}8)\right| \leq 0{,}04) = 2\Phi(0{,}04 \cdot \sqrt{(225/(0{,}8 \cdot 0{,}2))}) = 2\Phi(1{,}5).$$

Из табл. 2 находим, что Φ(1,5) = 0,433. Следовательно, 2Φ(1,5)=0,866. Расчётная искомая вероятность с некоторым приближением равна 0,866.

<u>Пример 14</u>. Положим, что поочерёдно испытываются n = 20 однотипных объектов. Вероятность, что объект окажется исправным p = 0,9, а для противоположного события вероятность q = 0,1. Определить наиболее вероятное число объектов, которые выдержат контрольные испытания.
Решение. Для нахождения ответа воспользуемся следующим двойным неравенством:

$$np - q \leq k_0 < np + p,$$

где возможны такие варианты:
- если число $np - q$ есть дробное, то имеет место одно наивероятнейшее число k_0;
- если число $(np - q)$ – целое, то существуют два наиболее вероятных числа, а именно: k_0 и $k_0 + 1$;
- если число np – целое, то наивероятнейшее число будет $k_0 = np$.

Подставим в двойное неравенство известные числа и получим:

$$20 \cdot 0{,}9 - 0{,}1 \leq k_0 < 20 \cdot 0{,}9 + 0{,}9, \qquad \text{или} \qquad 17{,}9 \leq k_0 < 18{,}9.$$

Значение k_0 – целое число, следовательно, между 17,9 и 18,9 есть лишь одно целое число 18, которое и является наивероятнейшим. То есть, наиболее вероятно, что испытания в итоге выдержат 18 объектов, что и является ответом.

Иной ответ был бы получен, если исходные данные были бы следующие: n = 24; p=0,6; q = 0,4. Из двойного неравенства получим:

$$24 \cdot 0{,}6 - 0{,}4 \le k_0 < 24 \cdot 0{,}6 + 0{,}6.$$

Откуда имеем: $14 \le k_0 < 15$. Так как $np - q = 14$ (целое число), то в данном случае находим два наивероятнейших числа: $k_0 = 14$ и $k_0 + 1 = 15$.

Пример 15. Используя выше приведённое двойное неравенство, определить число необходимых независимых испытаний объектов, чтобы определить наивероятнейшее число появлений события в опытах, равное $k_0 = 20$, если вероятность появления события в каждом эксперименте составляет $p = 0{,}4$ и $q = 0{,}6$.

Решение. Подставив в неравенство известные из начальных условий числа, получаем:

$$0{,}4n - 0{,}6 \le 20 \quad \text{и} \quad 0{,}4n + 0{,}4 > 20.$$

Решив эти два неравенства, находим, что $n \le 51{,}5$ и $n > 49$. Следовательно, двойному неравенству должен отвечать ответ: $49 \le n \le 52$.

Пример 16. Исследуем испытания объектов, в которых вероятности появления события различны (в отличие от предыдущих примеров). Первоначально сделаем несколько общих замечаний и пояснений.

Допустим, что выполняются n независимых испытаний. При этом в первом опыте вероятность появления события A равна p_1, во втором – p_2 и так далее, а в n-ом испытании это p_n. Противоположные события (непоявления A) обозначим через q с соответствующими индексами. Пусть $P_n(k)$ – вероятность появления события A в n независимых испытаниях ровно k раз. Тогда *производящей функцией вероятностей* $P_n(k)$ называют функцию, определяемую следующим равенством:

$$\varphi_n(z) = (p_1 z + q_1)(p_2 z + q_2)\ldots(p_n z + q_n).$$

Вероятность $P_n(k)$ того, что в n независимых испытаниях, в первом из которых вероятность появления события A равна p_1, во втором – p_2 и т.д., событие A появится ровно k раз, равна коэффициенту при z^k в разложении производящей функции по степеням z. Например, для $n = 2$ имеем:

$$\varphi_2(z) = (p_1 z + q_1)(p_2 z + q_2) = p_1 p_2 z^2 + (p_1 q_2 + p_2 q_1)z + q_1 q_2.$$

При этом коэффициент $p_1 p_2$ при z^2 равен вероятности $P_2(2)$ того, что в двух опытах событие A появится ровно два раза. Коэффициент $p_1 q_2 + p_2 q_1$ при z^1 равен вероятности $P_2(1)$ того, что в двух опытах событие A появится ровно один раз. Коэффициент $q_1 q_2$ (свободный член) при z^0 равен вероятности $P_2(0)$ того, что событие A не появится в экспериментах ни одного раза.

Если же в разных опытах появляются различные события (A_1, A_2,…), то меняется смысл коэффициентов при различных степенях z. Например, коэффициент p_1p_2 характеризует вероятность появления двух событий A_1 и A_2. Теперь сделаем числовой пример.

Допустим, что объект состоит из трёх независимых блоков/модулей. Вероятности их безотказной работы за временную наработку t будут такие: p_1 = 0,8; p_2 = 0,9; p_3 = 0,96. Противоположные события (отказы) соответственно через обозначения вероятностей будут такими: q_1 = 0,2; q_2 = 0,1; q_3 = 0,04. Далее запишем производящую функцию:

$\Phi_3(z) = (p_1z + q_1)(p_2z + q_2)\ (p_3z + q_3) = (0{,}8z + 0{,}2)(0{,}9z + 0{,}1)(0{,}96z + 0{,}04) =$

$= 0{,}6912z^3 + 0{,}2784z^2 + 0{,}0296z + 0{,}0008.$

Ответы: вероятность, что все три блока/модуля будут работать нормально, отвечает коэффициенту при z^3, то есть $P_3(3)$ = 0,6912; вероятность, что два блока/модуля будут исправно работать (по аналогии) с учётом коэффициента при z^2 будет равна 0,2784; вероятность, что один блок/модуль будет работать исправно равна коэффициенту при z^1, то есть 0,0296; наконец, вероятность того, что ни один из блоков/модулей не будет исправен, равна величине свободного члена, то есть 0,0008. Сделаем проверку расчёта, просуммировав найденные величины: 0,6912+0,2784+0,0296+0,0008 = 1. Следовательно, всё верно, так как реализована на 100% полная группа возможных событий.

Пример 17. Рассмотрим следующую ситуацию. Предположим, что в цехе изготавливают детали, структура материала которых может быть четырёх видов: перлитная, трооститная, сорбитная и мартенситная. Соответственно их количество 150, 350, 200 и 300 штук, что в сумме составляет 1000. Детали укладывают в один контейнер. Рассчитать вероятности взятия наугад деталей с перечисленными структурами материалов, присвоив им условные номера 1, 2, 3 и 4.

Решение. $P(1)$ = 150/1000 = 0,15; $P(2)$ = 350/1000 = 0,35; $P(3)$ = 200/1000 = =0,2; $P(4)$ = 300/1000 = 0,3. Проверка: сумма всех вычисленных вероятностей для общего количества деталей (как генеральной совокупности) равна 1.

Пример 18. Первоначально напомним, что биномиальным называют закон распределения дискретной случайной величины X – числа появлений события в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p; вероятность возможного значения $X = k$ (числа k появлений события) рассчитывают по формуле Бернулли:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Если число испытаний велико, а вероятность p появления события в каждом испытании весьма мала, то можно воспользоваться для расчёта приближённой формулой:

$$P_n(k) = (\lambda^k e^{-\lambda}) / k!,$$

где k – число появлений события в n независимых испытаниях; $q = 1 - p$;

$\lambda = np$ – среднее число появлений события в n испытаниях.

При этом считают, что случайная величина распределена по закону Пуассона.

Сделаем ещё дополнительные пояснения и приведём полезные для расчёта формулы. Пусть при определённых условиях вероятность появления события A в каждом опыте равна p. Требуется найти вероятность того, что серия из n независимых испытаний даст k появлений и $n - k$ отсутствий события A. По правилу умножения вероятность каждой определённой ситуации будет равна:

$$p^k(1-p)^{n-k}.$$

Число различных ситуаций равно числу различных групп по k испытаний в каждой, которые можно составить из n испытаний, то есть равно C_n^k. Тогда можно воспользоваться известной формулой

$$C_n^k = [n(n-1)\ldots(n-(k-1))] / (k(k-1)\ldots2\cdot1)$$

и записать, что искомая вероятность k появлений события A при n независимых испытаниях будет равна:

$$P_n(k) = \{[n(n-1)\ldots(n-(k-1))] / (k(k-1)\ldots2\cdot1)\} \cdot p^k(1-p)^{n-k}. \quad (*)$$

Данную формулу можно преобразовать к следующему виду:

$$C_n^k = (n(n-1)\ldots2\cdot1) / (k(k-1)\ldots 2\cdot1\cdot(n-k)(n-(k+1))\ldots2\cdot1);$$ или

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$ или $$P_n(k) = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} p^k(1-p)^{n-k}. \quad (*)$$

Помеченные звёздочкой (*) выражения – варианты записи формул Бернулли.

Теперь перейдём к числовому примеру. Допустим, что изготавливается трёхступенчатый цилиндрический вал (n=3) на токарном станке с разной шероховатостью на каждом из трёх участках/ступенях. Эти части работают независимо со своими парами трения. Вероятность отказа каждого участка вала в одном эксперименте одинаковая и равная 0,1.

Требуется составить закон распределения числа отказавших ступеней в течение некоторой фиксированной по длительности наработки.

Решение. Дискретная случайная величина X (число отказывающих в одном опыте участков) может иметь такие возможные ситуации: а) ни один из участков вала не отказал (x_1=0); вышел из строя один участок вала (x_2=1); вышли из строя две ступени вала (x_3=2); наблюдается отказ всех трёх ступеней вала (x_4=3). Так как отказы участков вала независимы между собой, а сумма вероятностей противоположных событий $p + q = 1$, то можно использовать в данном случае формулу Бернулли. Тогда $P_3(0)=q^3=0{,}9^3=0{,}729$; $P_3(1) = C_3^1pq^2 = 3 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9^2 = 0{,}243$, так как число сочетаний $C_3^1 = 3!/(1! \cdot (3-1)!) = =6 / 2 = 3$; $P_3(2) = C_3^2p^2q = 3 \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}9 = 0{,}027$; $P_3(3) = p^3 = 0{,}1^3 = 0{,}001$. Проверка: 0,729 + 0,243 + 0,027 + + 0,001 = 1. Следовательно, биномиальный закон распределения для X, значения которой 0, 1, 2 и 3, будет иметь следующий вид: p = 0,729; 0,243; 0,027 и 0,001 (рис. 1.13).

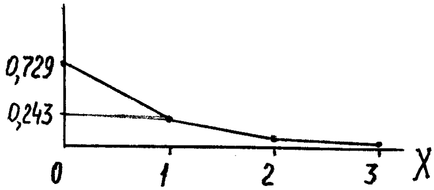


Рисунок 1.13 – Вид закона распределения

<u>Пример 19</u>. Завод выпускает массовую однотипную продукцию (болты с резьбой М20) в количестве n=50000 штук. Вероятность того, что резьба при независимости событий будет нарезана неаккуратно, равна p= 0,0001. Определить вероятность, что во всей партия будет k=5 дефектных изделий.

Решение. Так как число статистических данных весьма велико, вероятность появления конкретного события мала, то можно использовать ранее приведённую формулу Пуассона:

$$P_n(k) = (\lambda^k e^{-\lambda}) / k!.$$

Параметр $\lambda = np = 50000 \cdot 0{,}0001 = 5$. Тогда искомая расчётная вероятность будет: $P_{50000}(5) = (5^5 \cdot e^{-5}) / 5! = (3125 \cdot 0{,}006738) / 120 = 0{,}175$.

Здесь $5!=1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$. Ответ: вероятность составляет 0,175.

До перехода к следующему числовому примеру приведём ряд важных терминов/определений.