Н. Ф. Аксенов

Всё что я знаю о теоремах Пифагора и Ферма

$$z + x = (a + b)^2$$

Санкт-Петербург
2014

А 42

А 42 **Аксенов Н. Ф.**
Все, что я знаю о теоремах Пифагора и Ферма. — СПб., 2014. — 30 с.

Цель работы — показать, что элементарный метод, основанный на замене переменных, не полностью исчерпан. Метод замены переменных можно использовать при решении уравнений второй и выше второй степени с тремя неизвестными.

Результат, полученный при решении уравнения Пифагора, показывает, что другой подход к решению уравнения дает и другие формулы для определения неизвестных. Суть метода заключается в том, что каждая из переменных группы, например x, y, z, представляется суммой, в которой каждое из слагаемых является разностью переменных, полученной в определенном порядке.

Показана схожесть таблицы, составленной автором для группы треугольников Пифагора, с табличкой Плимптон 322.

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

К одному из наиболее интересных разделов теории чисел относится раздел, рассматривающий решения уравнений в целых числах. Решения алгебраических уравнений в целых числах с целыми коэффициентами более чем с одним неизвестным представляет собой одну из труднейших проблем теории чисел. Над этим работали многие поколения выдающихся математиков древности. Однако, несмотря на их усилия, в этой области отсутствуют сколько-нибудь общие методы.

Проблема решения уравнений в целых числах решена до конца только для уравнений второй степени с двумя неизвестными. Для уравнений выше второй степени с двумя или более неизвестными весьма трудна не только задача нахождения всех решений в целых числах, но и более простая задача — установление существования конечного или бесконечного множества таких решений.

Решение уравнений в целых числах имеет не только теоретический интерес. Такие уравнения иногда встречаются в физике.

В данной работе на примере решения уравнения Пифагора и доказательства Великой теоремы Ферма дается метод решения уравнений с тремя неизвестными. Предлагаемый метод может быть продуктивно использован для решения различных задач, где неизвестные представляются положительными целыми числами. Так, с помощью этого метода получены формулы для нахождения переменных, удовлетворяющих уравнению $x^2 + y^2 = z^2$, которые проще и продуктивнее классических формул.

Суть метода заключается в том, что каждое из переменных всей группы, например $x, y, z,$ представляется суммой, в которой каждое из слагаемых является разностью переменных, полученных в определенном порядке.

Вначале мы выведем новые формулы для решения уравнений Пифагора. На различных примерах покажем, как просто можно решать задачи, используя новые формулы. Сравним данные, полученные при решении задачи нахождения определенной группы треугольников Пифагора с данными в табличке Плимптон 322. В конце покажем, как методом замены переменных доказывается теорема Ферма.

С какими трудностями встречались специалисты при попытке найти доказательство теоремы Ферма, читатель может ознакомиться в книгах М. М. Постникова «Теорема Ферма» (М., 1978) и «Введение в теорию алгебраических чисел» (М., 1982). Также в девятой книге из серии «Мир математики» (М., 2014).

Что касается истории доказательства теоремы Ферма, то его публикация оказалась намного труднее, чем само доказательство.

Идея использовать метод замены переменных для решения задачи Пифагора и теоремы Ферма пришла к автору в 1970 году. Попытки опубликовать работу по решению уравнений второй и выше второй степени с тремя неизвестными ни к чему не привели. Так как, по убеждению специалистов, доказательство теоремы Ферма не существует, было решено работы в данной области не рассматривать. Работу по доказательству теоремы Ферма, без заключения специалистов, удалось опубликовать в 1990 году в «Сборнике научных трудов» Центрального конструкторского бюро арматуростроения (ЦКБА) и в 2006 году в пятом номере отраслевого журнала «Трубопроводная арматура и оборудование (ТПА)».

Позднее, по просьбе ЦКБА, на работу по теореме Ферма было получено заключение от Санкт-Петербургского математико-механического факультета, в котором отмечено: «…данная работа привлекает нестандартностью подхода к одной из наиболее актуальных проблем теории чисел…»

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ПИФАГОРА

Уравнение Пифагора относится к уравнениям второй степени с тремя неизвестными и имеет вид:

$$x^2 + y^2 = z^2 \tag{1}$$

Геометрически решение этого уравнения в целых числах можно истолковать как нахождение всех пифагоровых треугольников, т. е.

прямоугольных треугольников, у которых и катеты x, y, и гипотенуза z выражаются целыми числами.

История Пифагоровой теоремы начинается задолго до Пифагора. На протяжении веков были даны многочисленные доказательства теоремы Пифагора. В настоящее время известно более 150 доказательств теоремы и только один вариант решения для нахождения всех прямоугольных треугольников с целочисленными сторонами, т. е. нахождения всех целочисленных решений уравнения (1).

Если принять x за четное число, то по классическим формулам

$$x = 2mn\,,\ \ y = m^2 - n^2\,,\ \ z = m^2 + n^2 \tag{2}$$

при любых взаимно простых положительных целых числах m и $n < m$ разной четности можно определить все свободные от общих делителей тройки целых положительных чисел x, y, z, удовлетворяющие уравнению (1).

Рассмотрим решение уравнения (1) в целых числах, используя метод замены переменных x, y, z суммами, слагаемые которых представляют разности переменных, полученные в определенном порядке. Заметим, что нам достаточно найти лишь состоящие из положительных целых чисел примитивные решения x, y, z уравнения (1), где x — четное число.

Предположим, что x, y, z — примитивное решение уравнения (1) и x — четное число, y и z — нечетные числа. Очевидно, что $z > x$, $z > y$ и $(x + y) > z$.

Пусть $z - x = a_1$ — нечетное число, (3)

$z - y = b_1$ — четное число, (4)

$(x + y) - z = c_1$ — четное число. (5)

Сложив (4) с (5), (3) с (5), также (3) и (4) с (5), получим:

$$x = b_1 + c_1 \tag{6}$$

$$y = a_1 + c_1 \tag{7}$$

$$z = a_1 + b_1 + c_1 \text{ или } z = x + a_1\text{, или } z = y + b_1 \tag{8}$$

Подставив в (1) значения x, y, z из (6), (7) и (8), найдем взаимную зависимость чисел a_1, b_1, c_1:

$$(b_1+c_1)^2+(a_1+c_1)^2=\left[(b_1+c_1)+a_1\right]^2$$

Возведя в квадрат некоторые числа, получим

$$\left(b_1+c_1\right)^2+a_1^2+2a_1c_1+c_1^2=\left(b_1+c_1\right)^2+2a_1\left(b_1+c_1\right)+a^2$$

$$a_1^2+2a_1c_1+c_1^2=2a_1b_1+2a_1c_1+a^2$$

Сократив подобные члены, окончательно получим

$$c_1^2=2a_1b_1\,. \tag{9}$$

Числа a_1и b_1 взаимно простые, если бы числа a_1и b_1 имели общий делитель $d \neq 1$, то этот делитель имело бы число c_1, а из (6), (7), (8) и числа x, y, z, что противоречит условию взаимной простоте чисел x, y, z. Следовательно, и числа a_1и $2b_1$ также взаимно простые числа. Так как произведение $a_1 2b_1$ является полным квадратом, то число a_1 будет полным нечетным квадратом, а число $2b_1$ полным четным квадратом.

Известно, что если произведение двух взаимно простых чисел является квадратом, то каждый из сомножителей также будет квадратом.

Будем считать,

$$a_1=a^2\,, \tag{10}$$

$$2b_1=b^2 \ \text{или} \ b_1=\frac{b^2}{2} \tag{11}$$

В (9) число $2a_1b_1$ заменим значением из (10) и (11), получим

$$c_1^2=a^2b^2 \ \text{и} \ c_1=ab\,. \tag{12}$$

С учетом (10), (11), (12) равенства (3), (4) и (5) примут вид:

$$z-x=a^2\,,\ z-y=\frac{b^2}{2}\,,\ (x+y)-z=ab\,. \tag{13}$$

Из (13) следует, что числа a и b несут определенный геометрический смысл. Заменив в (6), (7) и (8) числа a_1, b_1 и c_1 их значениями из (10), (11) и (12), получим формулы для определения x, y, z, не содержащих общих делителей:

$$x = ab + \frac{b^2}{2} \text{ или } x = b(\mathrm{a} + \frac{b}{2}), \tag{14}$$

$$y = ab + a^2 \text{ или } y = a(a + b), \tag{15}$$

$$z = ab + a^2 + \frac{b^2}{2} \text{ или } z = x + a^2, \text{ или } z = y + \frac{b^2}{2}. \tag{16}$$

Подставляя в (14), (15) и (16) вместо a любое нечетное число, а вместо b любое четное число, которые не содержат общих делителей, получим все свободные от общих делителей тройки целых положительных чисел x, y, z, удовлетворяющих уравнению (1). Заметим, что если снять ограничения о взаимной простоте чисел a и b, получим все тройки целых положительных чисел x, y, z, удовлетворяющих уравнению (1).

Решив задачу нахождения всех сторон треугольников Пифагора через образующие числа a и b, найдем зависимость величин периметра и площади треугольника от этих чисел.

Периметр треугольника определяется формулой $P = x + y + z$.

Заменив x, y и z их значениями из (14), (15) и (16), получим

$$P = ab + \frac{b^2}{2} + ab + a^2 + ab + a^2 + \frac{b^2}{2}$$

$$P = 2ab + 2a^2 + ab + b^2 = 2a(a + b) + b(a + b),$$

$$P = (a + b)(2a + b) \tag{17}$$

Площадь прямоугольного треугольника определяется формулой $S = \frac{xy}{2}$. Заменив x и y их значениями из (14) и (15), получим

$$S = \frac{b}{2}(a + \frac{b}{2}) \times a(a + b) \cdot$$

Число $(a + \frac{b}{2})$ умножим, а число $\frac{b}{2}$ разделим на 2, получим

$$S = \frac{ab}{4}(a + b)(2a + b)$$

и с учетом (17)

$$S = \frac{ab}{4} P \cdot \qquad (18)$$

Площадь прямоугольного треугольника равна $\frac{1}{4}$ произведения периметра на разность между общей длиной катетов и гипотенузы.

Из величины $\frac{ab}{4}$ вытекает, что существует только один треугольник Пифагора, у которого площадь численно меньше периметра (при $a = 1$, $b = 2$) и два треугольника, у которых площади и периметры численно равны (при $a = 1$, $b = 4$ и при $a = 2$, $b = 2$).

При решении различных задач о треугольниках Пифагора полезно учитывать некоторые свойства сторон треугольников:

– катет x может быть только числом, делящимся на 4;

– катет y может быть любым нечетным числом. Если катет y — простое число, то $z - x = 1$, $z + x = y^2$, треугольник с таким катетом существует в единственном числе;

– гипотенуза z может быть только числом вида $4k + 1$, но не всякое число вида $4k + 1$ может быть гипотенузой треугольника Пифагора;

– сумма и разность сторон z и x — всегда полный квадрат:

$$(z + x) = (a + b)^2, \ (z - x) = a^2;$$

– сумма и разность сторон z и y — всегда половина квадрата:

$$(z + y) = \frac{(2a + b)^2}{2}, \ (z - y) = \frac{b^2}{2};$$

– разница между катетами x и y равна разнице между a^2 и $\frac{b^2}{2}$, если $a^2 > \frac{b^2}{2}$, то $y > x$, если $\frac{b^2}{2} > a^2$, то $x > y$.

– если стороны x, y, z простейшего треугольника Пифагора увеличить в d раз, то в d раз увеличится и произведение образующих ab, а числа a и b в $\sqrt{d}$ каждое.

Естественно, что между классическими формулами (2) нахождения сторон треугольников Пифагора и формулами (14), (15) и (16) существует определенная связь.

Так, из суммы длин гипотенузы и четного катета $(z + x)$ имеем:

$$ab + a^2 + \frac{b^2}{2} + ab + \frac{b^2}{2} = 2mn + m^2 + n^2,$$

откуда $(a + b)^2 = (m + n)^2$ (19)
и $(a + b) = (m + n)$ (20)
Для нечетного катета у имеем равенство $a(a + b) = (m + n)(m - n)$ с учетом (20), $(a + b) = (m + n)$.
Получим $a = (m - n)$ (21)
$b = 2n$ (22)

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ИЗ ОБРАЗУЮЩИХ ЧИСЕЛ *a* и *b*

Прежде чем приступить к решению задач, используя новые формулы, составим последовательность из пар чисел *a* и *b*, по которым определяются стороны пифагоровых треугольников.

Предположим, что *a* — постоянное число, а *b* — плавно возрастающее. Последовательность будет иметь вид: $a + 2$, $a + 4$, $a + 6$, $a + 8$, …

Для конкретных чисел *a* получим последовательность:
$a = 1$ — 3, 5, 7, 9, 11, 13…
$a = 3$ — 5, 7, 9, 11, 13…
$a = 5$ — 7, 9, 11, 13 *и т. д.*

Полученные последовательности сгруппируем в таблицу.

Таблица 1

a + b →	3	5	7	9	11	13	15	17
1	1,2	1,4	1,6	1,8	1,10	1,12	1,14	1,16
3		3,2	3,4	3,6	3,8	3,10	3,12	3,14
5			5,2	5,4	5,6	5,8	5,10	5,12
7				7,2	7,4	7,6	7,8	7,10
9					9,2	9,4	9,6	9,8
11						11,2	11,4	11,6
13							13,2	13,4
15								15,2

Первый горизонтальный ряд отображает последовательность *a* и *b*, $(a + b)$. Величина суммы $(a + b)$ равна величине нечетного катета треугольника Пифагора, если $a = 1$. И тогда $z = x + 1$.

Второй и последующий горизонтальные ряды отображают последовательность чисел, где a — постоянное, b — возрастающее.

Первый вертикальный столбец отображает последовательность чисел a. Второй и последующий вертикальные столбцы отображают возрастающую последовательность чисел a и убывающую последовательность чисел b.

Для каждой суммы чисел a и b существует определенное количество комбинаций этих чисел, а следовательно, и количество треугольников, у которых $(a + b)^2 = z + x$.

Количество таких треугольников определяется по формуле $\frac{(a+b)-1}{2}$.

Например, если $(a + b) = 11$, получим 5 треугольников, у которых $(a + b)^2 = z + x$.

В таблице также отражены последовательности, в которых b — постоянное, а a — возрастающее. Такие последовательности расположены в таблице по наклонной слева направо.

Следует отметить, что данные некоторых треугольников можно определить по упрощенным формулам:

$$\text{если } a = 1, \text{ то } y = b + 1,\ x = \frac{b^2}{2} + b,\ z = x + 1,$$

$$\text{если } b = 2, \text{ то } y = a\,(a + 2),\ z = y + 2,\ x = 2\,(a + 1).$$

Необходимо также отметить, что в множество треугольников, определенных по данной таблице, войдут как все примитивные треугольники, так и треугольники, стороны которых имеют общий нечетный делитель.

Очевидно, что для определенной группы треугольников Пифагора может быть составлена своя последовательность чисел a и b. Особый интерес вызывает последовательность чисел a и b, по которым можно определить все множество треугольников Пифагора, у которых величины катетов отличаются на 1, $x - y = \pm 1$.

Такая последовательность заслуживает особого внимания, и ей посвящается отдельная глава.

«ВОЛШЕБНАЯ» ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ

Поставим цель — найти все пифагоровы треугольники, у которых величина катетов отличается на 1, $x - y = \pm 1$.

Известно, что $y - x = a^2 - \frac{b^2}{2}$. Первые вычисления дают результат:

1–2 = –1, здесь $a = 1$, $b = 2$;
9–8 = 1, здесь $a = 3$, $b = 4$;
49–50 = –1, здесь $a = 7$, $b = 10$;
289–288 = 1, здесь $a = 17$, $b = 24$.

Заметим, что здесь каждое последующее нечетное число равно сумме двух предыдущих чисел a и b, а каждое последующее четное число равно сумме двух предыдущих нечетных чисел a_n и a_{n-1}.

Учитывая зависимость последующих чисел от предыдущих, составим последовательность:

1, 2, 3, 4, 7, 10, 17, 24, 41, 58, 99, 140, …

Данная последовательность содержит в себе такое количество скрытой информации, что ее можно назвать «волшебной» последовательностью. Так, например: $y_n = a_n \times a_{n+1}, x_n = y_n \pm 1$ или $x_n = \frac{b_n \times b_{n+1}}{2}$, $z_n = b_n \times a_{n+1} \pm 1$ периметр $П_n = a_{n+1} \times b_{n+1}$, площадь $S_n = \frac{1}{4} П_n \times a_n \times b_n$, (±1 выбирается с учетом $x = 4k$, $z = 4k + 1$).

Для наглядности данные треугольников Пифагора, полученные по указанным формулам, представим в таблице 2.

Таблица 2

1	2	3	4	5	6
x: y или *y: x*	*y*	*z*	*x*	*a*	*b*
0,5	3	5	4	1	2
0,95238095238	21	29	20	3	4
0,991666666	119	169	120	7	10
0,998565279	697	985	696	17	24
0,999753694	4059	5741	4060	41	58
0,999957736	23661	33461	23660	99	140
0,999992748	137903	195025	137904	239	338
0,999998755	803761	1136689	803760	577	816
0,999999786	4684659	6625109	4684660	1393	1970
0,999999963	27304197	38613965	27304196	3363	4756

Прежде чем заняться анализом полученных величин, обратим внимание на схожесть этой таблицы с табличкой Плимптон 322. Табличка Плимптон 322 помещена Альбертом Виолант-и-Хольцем в девятой книге «Загадка Ферма» из серии «Мир математики» (М., 2014). Табличка датируется 1822–1784 годами до н. э. Табличка с числами состоит из 16 строк и 4 столбцов. Для сравнения моей таблицы с табличкой Плимптон 322 нам достаточно воспроизвести несколько строк из таблички Плимптон 322 с добавлением значения x.

Таблица 3

I	II y	III z	IV	x
0,983402777	119	169	1	120
0,949158552	3367	4825	2	3456
0,918802126	4601	6649	3	4800
0,886247906	12709	18541	4	13500

Отметив, что специалистам пришлось изрядно потрудиться, чтобы перевести табличку в десятичную систему, найти зависимость чисел в табличке и устранить имеющиеся ошибки, автор книги «Загадка Ферма» делает заключение: «… но это не помогло найти разгадку. Множество вопросов оставалось без ответа. Почему были выбраны именно эти значения p и q, а не какие-то другие? И что означает число из первого столбца?»

Если предположить, что автор таблички, как и я, ставил задачу найти такие прямоугольные треугольники с целочисленными сторонами, у которых величина катетов отличалась на 1 и треугольник приближался к равнобедренному, то мою таблицу можно рассматривать как продолжение таблички Плимптон 322, несмотря на некоторые различия. Так, например, в табличке Плимптон 322 у всех треугольников катеты x больше катетов y, треугольники взяты бессистемно, по одному признаку — возрастание величины отношения y^2 к x^2.

В моей таблице помещены только такие треугольники, у которых катеты отличаются на 1, отношение катетов взято в первой степени и то x к y, то y к x. Так как и x может быть больше y, так и y может быть больше x.

Что касается подбора чисел для p и q, для нахождения сторон треугольников и почему табличка Плимптон 322 закончена треугольником с катетами 119 и 120. Можно утверждать, что автор таблички