ВВЕДЕНИЕ

В конце XIX — начале XX века в математике возникает новая дисциплина — *функциональный анализ.*

Развитие науки чрезвычайно расширило традиционно существовавшие области математики (алгебра, геометрия, математический анализ, теория дифференциальных уравнений и вариационное исчисление). Это породило новые понятия математики, которые обобщали ранее известные, или же были полностью оригинальными. Теория, оперирующая новыми понятиями, уже не могла быть принадлежностью «старых» математических дисциплин. Она становилась относительно самостоятельной. Так в науке появился функциональный анализ: корни его лежат в областях, упомянутых нами.

Иллюстрируем сказанное примером. Линейные пространства размерности 2 и 3 рассматриваются классической «школьной» и аналитической геометриями. Пространство произвольной конечной размерности — предмет прежде всего линейной алгебры. Теория пространств бесконечной размерности первоначально происходит из понятия линейной алгебры (линейная зависимость, базис, норма, скалярное произведение). Эта теория не может быть построена без привлечения понятий математического анализа — *окрестности* и предела. Тем самым, в ее основании лежит синтез алгебры, геометрии и математического анализа. Однако, сама указанная теория составляет один из главных предметов *функционального анализа.* Она не может быть отнесена к какой-либо математической дисциплине из упомянутых нами выше.

Становление функционального анализа стимулировалось быстрым развитием точных и естественных наук во второй половине XIX и в XX веках. Многие его понятия и методы непосредственно порождены вопросами, пришедшими извне — прежде всего, задачами механики и теоретической физики. Так, рассмотрение малых колебаний в системах с неограниченным числом степеней свободы привело к понятию *гильбертова пространства*, важнейшему в дальнейшем. Развитие электродинамики создало *теорию потенциала*, математическим аппаратом которой являются *интегральные уравнения.* Теория интегральных уравнений стала частью функционального анализа в его приложениях к пространствам функций и операторам в них. Исследования в области атомной физики привели с созданию квантовой механики. Математический аппарат квантовой механики — теория *самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве*, одно из важнейших направлений функционального анализа.

Приложение методов функционального анализа к объектам конкретной природы (множествам функций, дифференциальным уравнениям) сделало необходимым изменение некоторых понятий классического дифференциального и интегрального исчислений.

Прежде всего, это понятие интеграла. Поэтому книга открывается главой «Интеграл Лебега», играющей в дальнейшем служебную роль.

Поясним схему книги. Пособие разделено на главы; последние — на параграфы. Нумерация параграфов сквозная (не зависящая от № главы). В пределах параграфа нумерация теорем, лемм, утверждений, не называющихся теоремой или леммой, также сквозная. Особые номера (с указанием параграфа) имеют аксиомы. Например, ссылка вида «в силу теоремы 55.3» означает, что читателю следует в § 55 найти теорему с тем же номером. При ссылке на Ах. 13.1–Ах. 13.3 следует обратиться к § 13 и найти указанные аксиомы. Ссылка на литературный источник обозначается символом [№]: источник с указанным номером находится в списке литературы в конце пособия.

Книга содержит элементарный материал, относящийся лишь к некоторым областям функционального анализа. Прежде всего это материал, служащий основой вычислительных методов математики. Автор надеется, что работа с книгой возбудит в читателе интерес к предмету в более широком смысле и обратит его к изучению фундаментальных источников. Литература, относящаяся к функциональному анализу весьма велика. Мы указываем очень малую ее часть. Более полные сведения о литературных источниках читатель может найти в [6].

Предисловие, обращенное к преподавателю

Фрагменты функционального анализа присутствуют в курсах математики высших технических учебных заведений уже в течение 50–60 лет. Такие фрагменты включались, как правило, в традиционные главы курса (ряды Фурье; реже — уравнения математической физики). Со временем выявилась полезность выделения элементов функционального анализа в специальный раздел учебной программы, хотя бы небольшой. Польза, приносимая этим, состоит в рационализации курса, а также в возможности изложить материал, относящийся к метрическим и банаховым пространствам (наиболее часто до этого рассматривались лишь гильбертовы пространства и ряды Фурье в них). Приняв схему изложения, в которой банаховы пространства рассматриваются как частный случай метрических; гильбертовы — как частный случай банаховых, можно достичь заметной экономии учебного времени. Общность понятия метрического пространства позволяет спуститься с высот теории к традиционным задачам вычислительной математики, имеющим очевидное прикладное значение. Это приближенное решение алгебраических, трансцендентных, дифференциальных и интегральных уравнений, приближение функций рядами, построение ортогональных систем функций и т. д.

Литература, посвященная функциональному анализу (хотя бы в узком понимании принятом здесь) очень объемна. Достаточно упомянуть лишь ее малую часть — [1, 2, 6, 7]. Однако, все упомянутые источники рассчитаны на читателя, уже имеющего некоторую математическую культуру: например, студента-математика, возможно — физика. Тем самым, в литературе существует разрыв между «серьезными» книгами и учебниками для высших технических учебных заведений, содержащими фрагменты дисциплины. Сузить (хотя бы частично) этот разрыв призвано данное учебное пособие.

Выбор содержания книги диктовался размером учебного времени, предполагаемого для чтения курса (60–90 часов) и приоритетностью вопросов, составляющих теоретическое основание вычислительных методов. Это относится, прежде всего, к принципу сжатых отображений и его приложениям. Существенных потерь при этом избежать не удалось. Почти не изучаются неограниченные операторы в гильбертовом пространстве. Не рассматриваются экстремальные задачи для функционалов в банаховом пространстве (см. напр. [6]), несмотря на очевидное прикладное значение таких задач. Теория меры и интеграла Лебега излагается в минимально необходимом объеме; не рассматриваются некоторые виды сходимости последовательности функций. Мы отказались даже от кратких упоминаний о пространствах С. Л. Соболева и о теоремах вложения ([6, 7]); о топологических пространствах ([6]), и т. п.

Коснемся вопроса о строгости изложения материала. Опыт показывает, что математическая теория, излагаемая подряд без доказательств, абсолютно бесплодна. В течение короткого времени приобретенные сведения превращаются в хаотический конгломерат терминов в памяти учащегося; затем они забываются совсем. С другой стороны невозможно «доказать все». Автор желал достичь золотой середины, приводя доказательства, не являющиеся в масштабе книги чрезмерно сложными и объемными. При отсутствии доказательства, обязательно указывается источник, где оно приведено. Это не нарушает логики дальнейшего изложения. Для облегчения доказательств мы пошли на снижение общности при рассмотрении некоторых вопросов. Так, теория Фредгольма для вполне непрерывных операторов рассматривается только в гильбертовом пространстве.

Мы не включаем в пособие очерк истории функционального анализа. Он не может одновременно быть как содержательным, так и кратким.

Форма пособия может показаться читателю-математику непривычной; возможно — комичной. Нумерация параграфов на протяжении всей книги сквозная. В пределах одного параграфа единой является нумерация лемм, теорем и утверждений, «не заслуживших» названия теорем. Отдельную нумерацию, со специальным обозначение, имеют лишь аксиомы. Мы избегаем нумерованных формул. Избрать такой способ изложения автора побудило не желание быть оригинальным, а опыт преподавания. Для неискушенного читателя тройная (глава, § , №) нумерация утверждений, особенно формул, очень тяжела при работе с книгой. Мы используем лишь необходимый для логики курса небольшой список литературных источников. Наконец, мы надеемся, что названия параграфов заменят читателю предметный указатель.

Отправной точкой для создания пособия был курс лекций, читавшийся автором учащимся специальностей «Математическое обеспечение автоматизированных систем управления» и «Системы автоматизации управления» в высших технических учебных заведениях. Теоретическим фундаментом труда были книги выдающихся отечественных математиков В. И. Смирнова [7]; В. А. Люстерника и В. И. Соболева [6]; М. Ш. Бирмана и М. З. Соломяка [2]. Мы пользуемся возможностью напомнить эти высокие имена.

Автор благодарен профессору Т. А. Суслиной за рецензирование книги и полезные замечания.

ГЛАВА I. ИНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА

§ 1. Множества

Будем считать, что читатель знаком с понятием множества и простейшими опреациями над множествами (см. например книгу [3]). Мы лишь напомним необходимые далее обозначения и определения, относящиеся к множествам. Как правило, множества обозначаются заглавными буквами латинского и греческого алфавитов (M, **N**, E, Ω, G и т. п.); ∅ — пустое (не содержащее элементов) множество. Элементы множеств, как правило (но не всегда). обозначаются строчными буквами (x, *x*, **x**, ζ, ξ, **ζ** и т. п.). Символ ∈ обозначает принадлежность элемента множеству. Знаки объединения (∪), пересечения (∩), разности (\), включения (⊂) имеют стандартный смысл. Множества A, B такие, что A∩B = ∅, именуются ***дизъюнктными***. Будем писать:

$$M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_n = \bigcup_{k=1}^{n} M_k;\ M_1 \cap M_2 \cap \ldots \cap M_n = \bigcap_{k=1}^{n} M_k;$$

$$M_1 \cup M_2 \cup \ldots = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k;\ M_1 \cap M_2 \cap \ldots = \bigcap_{k=1}^{\infty} M_k.$$

Будем считать известными элементарные формулы, относящиеся к операциям над множествами: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$; $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$; $A = (A \setminus B) \cup \cup (AB)$; $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ и т. п.

Множество всех натуральных чисел стандартно обозначим **N**; множество всех целых чисел — через **Z**; множество всех рациональных чисел — через **Q**;

R — множество всех вещественных чисел; **C** — множество всех комплексных чисел (комплексная плоскость).

Пусть X, Y — два множества (вообще говоря, природа элементов X и элементов Y различна), причем любому элементу $x \in X$ поставлен в соответствие определенный элемент $y \in Y$. Будем говорить, что на множестве X задана *функция* f со значениями в Y: $y = f(x)$. Если каждому элементу $y \in Y$ соответствует *единственный* элемент $x \in X$ такой, что $f(x) = y$, то по определению для функции f существует *обратная функция* $f^{(-1)}$: именно, $f^{(-1)}(y) = x$ (не следует смешивать обозначение обратной функции $f^{(-1)}$ и степень $(f(y))^{-1}$). Если для f существует обратная функция, то по определению f осуществляет ***изоморфизм*** множеств X и Y; множества X и Y ***изоморфны*** (или *эквивалентны*).

Пусть множество Y изоморфно множеству натуральных чисел **N** = {1, 2, ...}. Тогда Y именуется *счетным* множеством. Элементы счетного множества можно перенумеровать.

Именно, если изоморфизм Y и **N** осуществляется функцией f, то для любого элемента $y \in Y$ существует число $k \in \mathbf{N}$ такое, что $y = f(k)$. Положив $y_k = f(k)$, получим, что $Y = \{y_1, ..., y_k, ...\}$. Счетное множество элементов называется также *последовательностью* элементов $\{y_k\}$. Элементы счетного множества можно нумеровать при помощи различных систем чисел. Наиболее часто встречаются нумерации числами 1, 2, ...; 0, 1, 2, ...; 0, 1, –1, 2, –2, ...

Упражнение. Элементы множества нумеруются числами 0, 1, –1, 2, –2, ... Выполнить переход к нумерации 1, 2, ...

Примером счетного множества является **Q**. Множество **R** не счетно (доказательство этого и понятие *мощности множества* см. в [3]).

§ 2. Множества в m-мерном евклидовом пространстве

Обозначения множеств, принадлежащих числовой оси **R** (именно (a, b), $[a, b]$, $(a, b]$, $[a, b)$, $(-\infty; a]$, $[a, +\infty)$, $(-\infty, a)$, $(a, +\infty)$) имеют обычный в математическом анализе смысл. Для какой-либо точки $a \in \mathbf{R}$ и числа $\varepsilon > 0$ интервал $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ именуется ε-*окрестностью* точки a. Обычным образом определим ограниченное сверху, ограниченное снизу и ограниченное множества в **R**. По определению, число p есть *точная верхняя граница* множества M, $\forall x \in$ M, $x \leq p$, и для $\forall \varepsilon > 0$ ε-окрестность p содержит хотя бы один элемент M. Точная верхняя граница обозначается sup M: sup M = p. Число q именуется *точной нижней границей* M, если для $\forall x \in$ M $x \leq q$, и для $\forall \varepsilon > 0$ ε-окрестность q содержит хотя бы один элемент M. Точная нижняя граница обозначается inf M = q. В соответствии с ***теоремой Дедекинда*** (см. [10]), множество M, ограниченное сверху, имеет точную верхнюю границу. При этом существует последовательность точек $\{x_n\}$ такая, что $\{x_n\} \subset$ M; $\lim x_n$ = sup M. Аналогичные утверждения справедливы для точной нижней границы.

Вещественное евклидово пространство точек размерности m $\mathbf{R}^m$ определим стандартным образом (см. напр. [4]). Именно, элементы $\mathbf{R}^m$ — точки (или векторы) $\boldsymbol{x} = (x_1, ..., x_m)$: $x_1, ..., x_m$ — координаты точки $\boldsymbol{x}$; числа $x_1, ..., x_m \in \mathbf{R}$. Для $\boldsymbol{x} = (x_1, ..., x_m) \in \mathbf{R}^m$, $\boldsymbol{y} = (y_1, ..., y_m) \in \mathbf{R}^m$, $|\boldsymbol{x}| = (\sum_{k=1}^{m} x_k^2)^{1/2}$; $|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| = (\sum_{k=1}^{m} |x_k - y_k|^2)^{1/2}$ — расстояние между $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$. Если для всех точек множества M, M $\subset \mathbf{R}^m$, $|\boldsymbol{x}| \leq$ C для некоторого C, то M именуется *ограниченным* множеством. Если $\boldsymbol{a}$ — точка в $\mathbf{R}^m$, $\varepsilon > 0$, то множество точек $\boldsymbol{x}$ таких, что $|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}| < \varepsilon$, называется ε-*окрестностью* точки $\boldsymbol{a}$ в $\mathbf{R}^m$.

Пусть M — множество в $\mathbf{R}^m$; $\boldsymbol{x}$ — некоторая точка. Точка $\boldsymbol{x}$ по определению есть *внутренняя точка* M, если для некоторого $\varepsilon > 0$ ε-окрестность точки $\boldsymbol{x}$ принадлежит M. Очевидно, внутренняя точка M принадлежит самому множеству M.

Пусть $\boldsymbol{y}$ — такая точка, что для любого $\varepsilon > 0$ ε-окрестность $\boldsymbol{y}$ содержит как точки, принадлежащие множеству M, так и точки M не принадлежащие. Тогда $\boldsymbol{y}$ именуется *предельной точкой* M. Заметим, что $\boldsymbol{y}$ может как принадлежать, так и не принадлежать M. Совокупность всех предельных точек M образует границу M. Границу M обозначим через $\Gamma = \Gamma(M)$ или ∂M. Множество $M \cup \Gamma(M) = \overline{M}$ называется *замыканием* M. Введем следующие важнейшие понятия:

Определение. Если все точки множества M — внутренние, то M именуется ***открытым множеством***.

Определение. Если все предельные точки множества H принадлежат H, то H именуется ***замкнутым множеством***.

Множество может не относится ни к открытым, ни к замкнутым.

Примеры: а) определим в $\mathbf{R}^m$ шар K условием: для $\boldsymbol{x} \in K$, $|x| < 1$. Шар K — открытое множество; б) куб Q в $\mathbf{R}^m$, определенный условием: для $\boldsymbol{x} = (x_1, ..., x_m) \in Q$, $x_i \in [0, 1]$, i = 1, ..., m — замкнутое множество; в) полуоткрытый куб Π в $\mathbf{R}^m$, заданный условиями: $\boldsymbol{x} = (x_1, ..., x_m) \in \Pi$, $x_i \in [0, 1]$, i = 1, ..., m, не является ни замкнутым, ни открытым множеством.

Упражнение. В ситуации m = 2 проверить а), б), в).

Отметим следующие утверждения:

2.1. Пересечение или объединение открытых множеств в конечном или счетном числе есть также открытое множество.

2.2. Пересечение или объединение замкнутых множеств в конечном числе есть замкнутое множество. Для объединения и пересечения таких множеств в счетном («бесконечном») числе это утверждение, вообще говоря, не имеет места.

2.3. Для любого множества M, его замыкание $\overline{\mathrm{M}}$ есть замкнутое множество. Множество M\Г(M) есть открытое множество.

2.4. Пусть последовательность точек $\{x_n\} \subset \mathrm{M}$, причем существует $\lim \boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{c}$. Тогда точка $\boldsymbol{c} \in \mathrm{M} \cup \Gamma(\mathrm{M}) = \overline{\mathrm{M}}$. В частности, если M — замкнутое множество, то $\boldsymbol{c} \in \mathrm{M}$.

2.5. Пусть M — открытое множество, T — замкнутое множество, причем $\mathrm{T} \subset \mathrm{M}$. Тогда разность $\mathrm{B} = \mathrm{M} \setminus \mathrm{T}$ — открытое множество.

Докажем лишь **2.5**. Пусть точка $\boldsymbol{c} \in \mathrm{B}$; тогда $\boldsymbol{c} \in \mathrm{M}$. Так как M — открытое множество, то для некоторого $\varepsilon > 0$, ε-окрестность $\boldsymbol{c}$ также принадлежит M. Допустим, что $\boldsymbol{c}$ не является внутренней точкой B. Тогда для $\forall \mathrm{n}$, $\mathrm{n} \in \mathbf{N}$, $\mathrm{n} > \varepsilon^{-1}$, в (n^{-1})-окрестности $\boldsymbol{c}$ найдется точка $\boldsymbol{x}_n$, не принадлежащая B; т. е. $\boldsymbol{x}_n \in \mathrm{T}$. Рассмотрим последовательность точек $\{x_n\}$. Очевидно, существует $\lim \boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{c}$. В силу того, что T — замкнутое множество, $\boldsymbol{c} \in \mathrm{T}$ (см. **2.4**). Это противоречит тому, что $\boldsymbol{c} \in \mathrm{B}$. Остается признать, что $\boldsymbol{c}$ — внутренняя точка B; все точки B — внутренние. Тем самым, B — открытое множество.

Доказательство утверждений **2.1**–**2.4** содержится в книге [3]. Самостоятельное доказательство является полезным упражнением.

Пусть множество $\mathrm{M} \subset \mathbf{R}^m$; точка $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^m$. Рассмотрим множество чисел $\mathrm{D} = \{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}|, \forall \boldsymbol{x} \in \mathrm{M}\}$. Множество D ограничено снизу (хотя бы числом 0), поэтому существует точная нижняя граница D $\inf \mathrm{D} = \mathrm{d} = \mathrm{dist}\,(\boldsymbol{a}, \mathrm{M})$. Величина d именуется расстоянием между $\boldsymbol{a}$ и M.

Упражнение. Пусть M — замкнутое множество. Доказать, что существует точка $x_0 \in M$ такая, что dist $(\boldsymbol{a}, M) = |\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{a}|$.

Пусть H и T — множества в $\mathbf{R}^m$. Расстояние между множествами определяется как $\inf\{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|, \forall \boldsymbol{x} \in H, \forall \boldsymbol{y} \in T\} = \mathrm{dist}(H, T)$.

Если для множества $M_0 \subset M$, dist $(M_0, \Gamma(M)) > 0$, то M_0 именуется *строго внутренним* в M множеством.

Рассмотрим комплексное евклидово пространство $\mathbf{C}^m$ точек (векторов) $\boldsymbol{z} = (z_1, ..., z_m)$, $z_i \in \mathbf{C}$, i = 1, ..., m; $|\boldsymbol{z}| = (\sum_{i=1}^{m} |z_i|^2)^{1/2}$ — норма $\mathbf{C}^m$; $|\boldsymbol{z} - \boldsymbol{z}^*|$ — расстояние между точками $\boldsymbol{z}$, $\boldsymbol{z}^*$ в $\mathbf{C}^m$ (см. [3]). Все определения и утверждения, сформулированные выше для пространства $\mathbf{R}^m$, сохраняются применительно к $\mathbf{C}^m$. Утверждения, аналогичные **2.1**–**2.5** легко получить как следствия последних, использую изоморфизм пространств $\mathbf{C}^m$ и $\mathbf{R}^{2m}$, а также равенство соответсвующих норм.

Упражнение. Доказать **2.5** для пространства $\mathbf{C}^m$.

§ 3. Мера Лебега

Меры конкретных множеств в $\mathbf{R}^m$ определялись и вычислялись еще в древнем мире при m = 1, 2, 3 (длина, площадь, объем). Развитие понятия интеграла привело к необходимости определить меру на широких классах множеств; например, для всех открытых множеств.

Введем простейшее множество в $\mathbf{R}^m$, которое занимает основное место в дальнейших построениях. Пусть a_i и b_i — числа; $a_i < b_i$, i = 1, ..., m. ***Ячейкой*** в $\mathbf{R}^m$ именуется множество Δ такое, что для $\boldsymbol{x} = (x_1, ..., x_m) \in \Delta$, $x_i \in [a_i, b_i)$, i = 1, ..., m. Меру ячейки определим естественным образом:

$$\operatorname{mes}\Delta = (b_1 - a_1)\times \ldots \times(b_m - a_m) = \prod_{i=1}^{m}(b_i - a_i).$$

Будем считать ячейкой пустое множество $\varnothing$, положив по определению $\operatorname{mes}\varnothing = 0$. Сформулируем следующее утверждение:

Теорема 3.1. Пусть G — ограниченное открытое множество в $\mathbf{R}^m$. Существует счетное множество — совокупность ячеек $\{\Delta_k\}$ такая, что

$$\Delta_k \cap \Delta_j = \varnothing, \forall k \neq j; \bigcup_{k=1}^{\infty}\Delta_k = G$$

(ячейки дизъюнктны; G представляется совокупностью ячеек).

Доказательство теоремы см. в [3]. В доказательстве строятся ячейки с ребрами, равными 2^{-s}, 2^{-s-1}, ..., 2^{-n}, ..., принадлежащие G ($s\in\mathbf{N}$, s зависит от размеров множества G). Самостоятельное доказательство теоремы является полезным и не очень сложным упражнением. Легко видеть, что для ячеек совокупности, указанной выше и для $\forall p\in\mathbf{N}$, $\sum_{k=1}^{p} \operatorname{mes}\Delta_k \leq C(G)$ (C зависит от размеров G). Поэтому ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{mes}\Delta_k$ сходится. Сумму ряда обозначим через S.

Определение. Сумма ряда S именуется ***мерой Лебега*** открытого множества G:

$$\operatorname{mes} G = \sum_{k=1}^{\infty}\operatorname{mes}\Delta_k = S.$$

Можно доказать, что S не зависит от способа представления G ячейками (очевидно, такой способ не единственен).

Зададим некоторые числа A_i, B_i: $A_i < B_i$ i = 1, ..., m. Определим открытый параллелепипед П в $\mathbf{R}^m$ следующими условиями: для $x = (x_1, \ldots, x_m)\in\Pi_0$, $x_i\in(A_i, B_i)$, i = 1, ..., m. Замыкание Π_0 — множество $\Pi_1 = \overline{\Pi}$ будем называть *замкнутым параллелепипедом. Параллелепипедом* П именуется любое множество, такое, что $\Pi_0\subset\Pi\subset\Pi_1$. Исходя из определения меры Лебега, доказывается (см. [3]), что $\operatorname{mes}\Pi_0 = \prod_{i=1}^{m}(B_i - A_i) =$ $= (B_1 - A_1)\times\ldots\times(B_m - A_m)$.

Пусть T — замкнутое ограниченное множество в $\mathbf{R}^m$. В силу ограниченности T, существует открытый параллелепипед $\Pi_0(T)$, содержащий T. При этом разность $\Pi_0(T)\setminus T = H(T)$ — открытое множество (см. **2.5**).

Определение. Мера Лебега замкнутого множества T,

$$\text{mes}\, T = \text{mes}\, \Pi_0(T) - \text{mes}\, H(T).$$

Упражнение. Показать, что mes T не зависит от выбора параллелепипеда $\Pi_0(T)$.

Пусть E — какое-либо ограниченное множество в $\mathbf{R}^m$. Совокупность всех ограниченных открытых множеств G, содержащих E, обозначим через $\Psi(E)$; совокупность всех замкнутых множеств T, содержащихся в E — через T(E). Введем числовые множества $G = \{\text{mes}\, G: G \in \Psi(E)\}$; $T = \{\text{mes}\, T: T \in T(E)\}$. Множество G ограничено снизу (хотя бы числом 0); множество T — сверху (хотя бы мерой любого открытого параллелепипеда, содержащего E). Тем самым существует $\inf G$ и $\sup T$.

Определение. Величины $\text{mes}_{(+)}\, E = \inf G$ и $\text{mes}_{(-)}\, E = \sup T$ именуются соответственно *внешней* и *внутренней* мерой Лебега множества E.

Определение. Если внешняя мера Лебега множества E равна внутренней мере E, то множество E именуется ***измеримым по Лебегу*** (далее — ***измеримым***). Величина

$$\text{mes}\, E = \text{mes}_m\, E = \text{mes}_{(+)}\, E = \text{mes}_{(-)}\, E$$

именуется ***мерой Лебега*** (далее — ***мерой***) множества E.

Из определения измеримости множества, внешней и внутренней мер, точной верхней и нижней границ числового множества следует утверждение:

3.2. Если E измеримо, то для любого $\varepsilon > 0$ существуют открытое множество G_ε и замкнутое множество T_ε такие, что $E \subset G_\varepsilon$; $T_\varepsilon \subset E$; $\text{mes}\, G_\varepsilon < \text{mes}\, E + \varepsilon$; $\text{mes}\, T_\varepsilon > \text{mes}\, E - \varepsilon$.

Доказательства (см. [3]) следующих ниже утверждений основываются на определениях измеримости множества, меры Лебега и **3.2**. Доказательства не сложны и могут быть проведены самостоятельно.

3.3. Все открытые и замкнутые множества в $\mathbf{R}^m$ измеримы.

3.4. Если B, M — измеримые множества, причем $B \subset M$, то $\text{mes} B \le \text{mes}\, M$.

3.5. Пересечение и объединение в счетном (или конечном) числе измеримых множеств есть множество измеримое. Разность двух измеримых множеств также измерима.

3.6. Если множества $E_1, E_2, ..., E_n, ...$ измеримы и дизъюнктны ($E_i \cap T_j = \varnothing$, $i \neq j$), а их объединение $E = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$ — ограниченное множество. то $\text{mes}\, E = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \text{mes}\, E_k$ (то же в случае $1 \le k \le p < \infty$).

3.7. Любое счетное (или конечное) ограниченное множество точек в $\mathbf{R}^m$ имеет меру равную 0.

3.8. Любой параллелепипед П в $\mathbf{R}^m$ измерим. Его мера равна мере определенной ранее для открытого параллелепипеда $\Pi_0 = \Pi \backslash \Gamma(\Pi)$.

Упражнение. Доказать утверждения **3.7**, **3.8**.

Отметим, что стандартные множества в $\mathbf{R}^m$ (эллипсоид, многогранник и т. п.) измеримы. Мера Лебега таких множеств равна их объему определенному классическим образом.

Определим меру Лебега неограниченного множества E в $\mathbf{R}^m$. Обозначим через K_r открытый шар радиуса r в $\mathbf{R}^m$: для $\boldsymbol{x} \in K_r$, $|\boldsymbol{x}| < r$ $(r > 0)$. Будем считать, что ограниченные множества $E_r = E \cap K_r$ измеримы для любого r. Обозначим: $f(r) = \text{mes } E_r$.

Так как при условии $r < r^*$, $K_r \subset K_{r^*}$, то в силу 3.4 функция f(r) монотонно возрастает.

Рассмотрим две возможности: а) функция f(r) неограниченна. Тогда, **по определению**, $\text{mes } E = \infty$. Такое множество E будем также считать измеримым; б) функция f(r) ограниченна. Тогда существует предел 3.9:

$$\lim f(r) = \mu,\ r \to +\infty;$$

E именуется *множеством конечной меры*. **По определению**, $\text{mes } E = \mu$.

Операции объединения в конечном (вообще говоря, не в счетном) числе, пересечения (в счетном или конечном числе) и разности, применяемые к множествам конечной меры приводят, опять-таки, к множествам конечно меры.

Упражнение. Доказать последние утверждения, исходя из определения б) меры неограниченного множества.

§ 4. Измеримые функции

Пусть E — некоторое множество в $\mathbf{R}^m$. Для всех $\boldsymbol{x} \in E$ будем считать заданной функцию f со значениями в $\mathbf{R}$: $y = f(\boldsymbol{x}) \in \mathbf{R}$. Зададим какое-либо число $a \in \mathbf{R}$ и определим следующие *множества Лебега* функции f типов1), 2), 3), 4):

$E[f(\boldsymbol{x}) < a] = \{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{x} \in E;\ f(\boldsymbol{x}) < a\}$;

$E[f(\boldsymbol{x}) \le a] = \{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{x} \in E;\ f(\boldsymbol{x}) \le a\}$;

$E[f(\boldsymbol{x}) > a] = \{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{x} \in E;\ f(\boldsymbol{x}) > a\}$;

$E[f(\boldsymbol{x}) \ge a] = \{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{x} \in E;\ f(\boldsymbol{x}) \ge a\}$;

Определение. Пусть множества типа 1) измеримы для любого $a \in \mathrm{R}$. Тогда функция f именуется ***измеримой на множестве*** E.

Покажем, что из измеримости функции следует измеримость самого множества E. Нетрудно видеть, что все множество E представляется в виде объединения множеств $\mathrm{E}[\mathrm{f}(\mathrm{x}) < n]$ для $\forall \mathrm{n} \in \mathbf{Z}$. Последние множества типа 1) измеримы; измеримо и их объединение E.

Лемма 4.1. Измеримость функции f на множестве E равносильна измеримости множеств Лебега типа 2) или типа 3) или типа 4) для $\forall a \in \mathbf{R}$.

Докажем, что измеримость множеств типа 1) (т. е. измеримость f) и измеримость множеств типа 2) равносильны. Пусть множества Лебега $\mathrm{E}[\mathrm{f}(\boldsymbol{x}) < a]$ измеримы для $\forall a$. Докажем, что $\mathrm{E}[\mathrm{f}(\boldsymbol{x}) \leq a] = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \mathrm{E}\,[\mathrm{f}(\boldsymbol{x}) < a + n^{-1}]$. Действительно, если точка $\boldsymbol{x} \in \mathrm{E}$, $\mathrm{f}(\boldsymbol{x}) = a_1 > a$, то при условии $\mathrm{n} > (a_1 - a)^{-1}$, $\boldsymbol{x}$ не принадлежит ни одному из множеств $\mathrm{E}[\mathrm{f}(\boldsymbol{x}) < a + n^{-1}]$. Отсюда следует, что все точки множества в правой части равенства принадлежат множеству в его левой части. Обратное включение очевидно. Множество типа 2) в левой части измеримо как пересечение измеримых множеств.

Далее, пусть измеримы все множества типа 2). Заметим, что для $\mathrm{n} \in \mathbf{N}$, множества $\mathrm{E}_{\mathrm{n}}(a) = \{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{x} \in \mathrm{E};\ a - n^{-1} < \mathrm{f}(\boldsymbol{x}) \leq a\} = \mathrm{E}[\mathrm{f}(\boldsymbol{x}) \leq a] \setminus \mathrm{E}[\mathrm{f}(\boldsymbol{x}) \leq a - n^{-1}]$ измеримы как разность множеств типа 2). Рассмотрим также множество $\mathrm{E}_{\infty}(a) = \{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{x} \in \mathrm{E};\ \mathrm{f}(\boldsymbol{x}) = a\} = \bigcap\limits_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \mathrm{E}_{n}(a)$, измеримое в силу измеримости множеств $\mathrm{E}_{\mathrm{n}}(a)$ для $n \in \mathbf{N}$. Так как $\mathrm{E}[\mathrm{f}(\boldsymbol{x}) < a] = \mathrm{E}[\mathrm{f}(\boldsymbol{x}) \leq a] \setminus \mathrm{E}_{\infty}(a)$, то все множества типа 1) измеримы. Измеримости множеств типов 1) и 2) равносильны. Равносильность измеримости множеств типов 1) и 3); типов 1) и 4) доказывается с помощью равенств

$E[f(\boldsymbol{x}) > a] = E\setminus E[f(\boldsymbol{x}) \le a]$; $E[f(\boldsymbol{x}) \ge a] = E\setminus E[f(\boldsymbol{x}) < a]$. Эти доказательства мы предоставляем читателю в виде *упражнения*.

Приведем без доказательств (см. [3]) простые утверждения, относящиеся к измеримым функциям:

4.2. Пусть для $\boldsymbol{x}\in E$, $f(\boldsymbol{x}) = c$ (c — постоянная). Если E измеримо, то f измерима на E.

4.3. Пусть f измерима на E; E_0 — измеримое подмножество E. Тогда f измерима на E_0.

4.4. Пусть множество E — объединение множеств E_k в конечно или счетном числе; f — функция, заданная на E. Если f измерима на каждом из множеств E_k, то она измерима на E. Пусть множества E, $X\subset\mathbf{R}^m$; $E\subset X$. Определим на множестве X *характеристическую функцию* $\chi(\boldsymbol{x})$ множества E: $\chi(\boldsymbol{x}) = 0$ для $\boldsymbol{x}\in X\setminus E$; $\chi(\boldsymbol{x}) = 1$ для $\boldsymbol{x}\in E$.

4.5. Если множество E измеримо, то его характеристическая функция измерима на множестве X.

Упражнение. Доказать утверждения **4.2**–**4.5** самостоятельно.

Рассмотрим алгебраические операции (сложение, умножение) над измеримыми функциями.

Теорема 4.6. Если функции f, g измеримы во множестве E, то функции f + g, f – g, fg, |f| также измеримы на E.

Доказательство приведем лишь для суммы функций. Предварительно заметим, что множество всех рациональных чисел счетно и может быть представлено в виде числовой последовательности $\{r_k\}$, $k\in\mathbf{N}$. Если p, e — два числа; p < e, то найдется член последовательности $\{r_k\}$ такой, что $p < r_k < e$ (k = k(p, e)). Установим следующее равенство:

$$E[f(\boldsymbol{x}) + g(\boldsymbol{x}) > a] = \bigcup_{k=1}^{\infty} E[f(\boldsymbol{x}) > a - r_k] \cap E[g(\boldsymbol{x}) > r_k].$$

Действительно, пусть $\boldsymbol{x} \in E[f(\boldsymbol{x}) + g(\boldsymbol{x}) > a]$, т. е. $\boldsymbol{x} \in E$; $g(\boldsymbol{x}) > a - f(\boldsymbol{x})$. Выберем (см. выше) такой член последовательности r_k, для которого $a - f(\boldsymbol{x}) < r_k < g(\boldsymbol{x})$. Отсюда, $f(\boldsymbol{x}) > a - r_k$; $g(\boldsymbol{x}) > r_k$; точка $\boldsymbol{x}$ принадлежит пересечению множества $E[g(\boldsymbol{x}) > r_k]$ и множества $E[f(\boldsymbol{x}) > a - r_k]$ при некотором k. Множество в левой части равенства принадлежит множеству в правой части. Обратное включение очевидно. Множества в правой части равенства суть множества Лебега типа 3) для функций f и g. Тем самым, они измеримы для $\forall k$ (см. ***лемму 4.1***). Отсюда, множества Лебега типа 3) функции f + g измеримы для любого a; сумма функций измерима. Доказательство измеримости функций fg, |f| см. в [3].

Упражнение. Доказать измеримость разности f – g.

Установим соотношение измеримости и непрерывности функции на замкнутом множестве.

Теорема 4.7. Пусть функция f непрерывна на замкнутом множестве E. Тогда функция измерима на этом множестве.

Доказательство. Установим замкнутость множеств Лебега типа 2): это означает их измеримость, а следовательно — измеримость функции на E. Пусть $\boldsymbol{c}$ — предельная точка множества $E[f(\boldsymbol{x}) \le a]$. Для $\forall n \in \mathbf{N}$, n^{-1}-окрестность $\boldsymbol{c}$ содержит хотя бы одну точку $\boldsymbol{x}_n \in E\,[f(\boldsymbol{x}) \le a]$. Очевидно, существует предел $\lim \boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{c}$. В силу неперрывности функции на замкнутом множестве E, существует $\lim f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{c})$. Так как для $\forall n$ $f(\boldsymbol{x}_n) \le a$, то $f(\boldsymbol{c}) \le a$; $c \in E[f(\boldsymbol{x}) \le a]$. Множество Лебега замкнуто при любом a, что и требовалось.

Из измеримости функции ее непрерывности не следует.

Упражнение. Привести пример измеримой разрывной функции.

В заключение введем еще одно определение. Пусть $\boldsymbol{x} \in E$; $A(\boldsymbol{x})$ — некоторое высказывание (*предикат*), истинность которого зависит от $\boldsymbol{x}$. Области истинности и ложности A обозначим через $E_{(+)}$, $E_{(-)}$, считая $E_{(+)}$ и $E_{(-)}$ измеримыми множествами (тогда измеримо и $E = E_{(+)} \cup E_{(-)}$). Если $\mathrm{mes}\, E_{(-)} = 0$, то, по определению, A выполнено (истинно) ***почти всюду*** на множестве E. Если f, g — измеримые на E функции; $f(\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{x})$ почти всюду (п. в.) на E, то f и g именуются ***эквивалентными*** на E функциями; $f \sim g$ (на E).

§ 5. Интеграл Лебега от ограниченной функции

Пусть E — измеримое множество конечной меры в $\mathbf{R}^m$ (см. **§ 3**). Будем говорить, что множества $e_1, \ldots, e_p$ образуют ***разбиение*** τ множества E, если выполнены следующие условия: множества e_i измеримы для $i = 1, \ldots, p$; $p = p(\tau) < \infty$, причем $e_i \cap e_j = \varnothing$, $\forall i, \forall j$, $i \neq j$; $\bigcup\limits_{i=1}^{p} e_i = E$. Таким образом, τ обозначает способ разбиения множества E. Будем писать: $e_i \in \tau$ $(i = 1, \ldots, p)$, если e_i — одно из множеств, составляющих разбиение τ (кратко: e_i — элемент τ).

Пусть τ, τ^* — два разбиения E. Если любой элемент τ^* принадлежит какому-либо элементу τ, то, по определению, разбиение τ^* *мельче*, чем разбиение τ, что обозначается: $\tau \subset \tau^*$. Разбиение τ^* может быть получено из τ следующими операциями: какой-либо элемент τ, содержащий два или более элементов τ^*, разбивается на две части так, что полученное разбиение $\tau^{(1)} \subset \tau^*$. Далее, выбирается элемент $\tau^{(1)}$, содержащий более одного элемента τ^*; этот элемент разбивается на две части так, что полученное разбиение $\tau^{(2)} \subset \tau^*$. Продолжение процесса приводит к разбиению τ^*.

Пусть на E задана ограниченная функция f: для $\boldsymbol{x}\in E$; $A < f(\boldsymbol{x}) < B$. Если τ — какое-либо разбиение E, то для любого $e_i\in\tau$ существуют и конечны величины $m_i = \inf f(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x}\in e_i$; $M_i = \sup f(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x}\in e_i$. Определим следующие *нижнюю и верхнюю суммы Дарбу–Лебега*:

$$s(f, \tau) = \sum_{i=1}^{p} m_i \operatorname{mes} e_i;$$

$$S(f, \tau) = \sum_{i=1}^{p} M_i \operatorname{mes} e_i;\ p = p(\tau).$$

Очевидно, для любого разбиения τ, $s(f, \tau) \le S(f, \tau)$.

Лемма 5.1. Пусть разбиение τ^* мельче, чем разбиение τ. Тогда

$$s(f, \tau^*) \ge s(f, \tau);$$

$$S(f, \tau^*) \le S(f, \tau).$$

Доказательство. Сначала будем считать, что разбиение $\tau^* = \tau^{(1)}$: $\tau^{(1)}$ получается из τ разбиением одного из элементов τ на два множества. Можно считать, что этот элемент — e_1; таким образом, $e_1 = e_1^* \cup e_2^*$; $e_1^* \cap e_2^* = \varnothing$; $e_3^* = e_2$; ...; $e_{p+1}^* = e_p$. Очевидно, что для верхних и нижних границ значений функции f на множествах e_i^* (эти границы обозначаются m_i^*, M_i^*) справедливы следующие неравенства: $m_1^* \ge m_1$; $m_2^* \ge m_1$; $M_1^* \le M_1$; $M_2^* \le M_1$; $m_i^* = m_{i-1}$; $M_i^* = M_{i-1}$ для $i = 3, ..., p + 1$. Отсюда, для сумм Дарбу–Лебега получим, что $s(f, \tau^*) = s(f, \tau^{(1)}) =$
$= m_1^* \operatorname{mes} e_1^* + m_2^* \operatorname{mes} e_2^* + \sum_{i=3}^{p+1} m_i^* \operatorname{mes} e_i^* \ge m_1(\operatorname{mes} e_1^* + \operatorname{mes} e_2^*) + \sum_{i=2}^{p} m_i \operatorname{mes} e_i = s(f, \tau)$. Неравенство $S(f, \tau^*) \le S(f, \tau)$ в случае $\tau^* = \tau^{(1)}$ устанавливается аналогично. В общей ситуации, от разбиения τ переходим к $\tau^{(1)}$; от $\tau^{(1)}$ — к $\tau^{(2)}$ и т. д. (см. описание операций перехода от τ к τ^* выше). Получим, что $s(f, \tau) \le s(f, \tau^{(1)}) \le s(f, \tau^{(2)})$; $S(f, \tau) \ge S(f, \tau^{(1)}) \ge S(f, \tau^{(2)})$. Последовательное применение приводит к утверждению леммы.

Лемма 5.2. Пусть τ, μ — какие-либо разбиения E. Тогда

$$s(f, \tau) \le S(f, \mu).$$

Доказательство. Пусть $e_1, ..., e_p$ — элементы τ; $h_1, ..., h_s$ — элементы μ. Введем разбиение ν множества E на элементы $\nu_{ij} = e_i \cap h_j$ (i = 1, ..., p; j = 1, ..., s; элементы $\nu_{ij} = \varnothing$ исключаются). Очевидно, $\tau \subset \nu$; $\mu \subset \nu$. В силу ***леммы 5.1*** $s(f, \tau) \le s(f, \nu) \le$ $\le S(f, \nu) \le S(f, \mu)$.

Фиксируем какое-либо разбиение E ω. Для произвольного разбиения τ, в соответствии с леммой 5.2, $s(f, \tau) \le S(f, \omega)$; $S(f, \tau) \ge s(f, \omega)$. Тем самым, существую и конечны величины

$$I_{(-)}(f) = \sup s(f, \tau), \forall \tau;$$

$$I_{(+)}(f) = \inf S(f, \tau), \forall \tau.$$

Определение. Если $I_{(-)}(f) = I_{(+)}(f)$, то функция f называется ***интегрируемой по Лебегу*** на множестве E. Величина $I = I_{(-)}(f) = I_{(+)}(f)$ именуется ***интегралом Лебега*** функции f на множестве E и обозначается $I = \int_E f(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}$.

Теорема 5.3. Если ограниченная на множестве E функция измерима на E, то интегрируема по Лебегу на E.

Доказательство. Для $\boldsymbol{x} \in E$, $A \le f(\boldsymbol{x}) \le B$. Пусть $n \in \mathbf{N}$. Для k = 0, 1, ..., n – 1 введем множества, образующие разбиение E: $E_k(f, n) = \{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{x} \in E;\ A + (B - A)n^{-1}k \le f(\boldsymbol{x}) <$ $< A + (B - A)n^{-1}(k + 1)\}$. Очевидно, $\bigcup_{k=0}^{n-1} E_k(f, n) = \{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{x} \in E;\ A \le f(\boldsymbol{x}) < B\} = E$; $E_k(f, n) \cap E_j(f, n) = \varnothing$, $\forall k, j$, $k \ne j$. Множества $E_k(f, n)$ измеримы. Действительно, $E_k(f, n) = E[f(\boldsymbol{x}) < A + (B - A)n^{-1}(k + 1)] \setminus E[f(\boldsymbol{x}) < A + (B - A)n^{-1}k]$. Последние два множества есть множества Лебега типа 1) измеримой функции. Введенное разбиение E обозначим через $\tau(n)$. Обозначим также: $m_k = \inf f(\boldsymbol{x})$; $M_k = \sup f(\boldsymbol{x})$,

$\boldsymbol{x}\in E_k(f, n)$. Так как $s(f, \tau(n)) \le I_{(-)}(f) \le I_{(+)}(f) \le S(f, \tau(n))$, то справедливы следующие неравенства: $0 \le I_{(+)}(f) - I_{(-)}(f) \le S(f, \tau(n)) - s(f, \tau(n)) = \sum_{k=0}^{n-1} (M_k - m_k)\text{mes } E_k(f, n)$. В силу определения множеств $E_k(f, n)$, $M_k - m_k \le (B - A)n^{-1}$, $\forall k$.

Из последних неравенств следует, что для $\forall n\in\mathbf{N}$, $0 \le I_{(+)}(f) - I_{(-)}(f) \le (B - A)\times$ $\times n^{-1} \sum_{k=1}^{n-1} \text{mes } E_k(f, n) = (B - A)(\text{mes } E)n^{-1}$. Остается признать, что $I_{(-)}(f) = I_{(+)}(f)$. Теорема доказана.

§ 6. Интеграл Римана и интеграл Лебега

Систематическое изложение теории классического интеграла Римана содержится в курсах математического анализа (см. напр. [11]). Напомним определение интеграла Римана для функции f, непрерывной на замкнутом ограниченном множестве V ($V\subset\mathbf{R}^m$). Множество V представляется в виде объединения дизъюнктных множеств $v_1, ..., v_n$; $\overline{v}_i$ — замыкания множеств v_i, $d_i = \sup |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|: \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\in v_i$; $\lambda = \max d_i$, $i = 1, ..., n$. Для каждого из множеств v_i будем считать определенно естественную меру Δv_i — объем в $\mathbf{R}^m$. Будем считать v_i измеримыми также по Лебегу, причем $\Delta v_i = \text{mes } v_i = \text{mes } \overline{v}_i$. Очевидно, множества v_i образуют разбиение V, которое мы обозначим τ_n; $\lambda = \lambda(\tau_n)$.

Так как функция f непрерывна на V, то на каждом из замкнутых множеств $\overline{v}_i$ она достигает наименьшего и наибольшего значений. Именно, существуют точки $\boldsymbol{a}_i$, $\boldsymbol{b}_i\in \overline{v}_i$ такие, что $f(\boldsymbol{a}_i) = \inf f(\boldsymbol{x})$, $f(\boldsymbol{b}_i) = \sup f(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x}\in v_i$. Обозначим: $f(\boldsymbol{a}_i) = m_i$; $f(\boldsymbol{b}_i) = M_i$. Выберем произвольным образом точки $\xi_i\in \overline{v}_i$, $i = 1, ..., n$. Составим ***интегральную сумму*** функции f на множестве V:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta v_i.$$

В частности, ***верхняя и нижняя суммы Дарбу*** — интегральные суммы $S_n^* = \sum_{i=1}^{n} M_i \text{ mes } v_i$; $s_n^* = \sum_{i=1}^{n} m_i \text{ mes } v_i$ (см. определения m_i, M_i выше).

Теорема 6.2. Пусть последовательность разбиений множества V $\{\tau_n\}$ такова, что существует $\lim \lambda(\tau_n) = 0$ $(n \to \infty)$. Тогда существует $\lim S_n = J$. Величина J не зависит от выбора разбиений τ_n и от выбора точек $\xi_i \in v_i$. Доказательство теоремы см. в [11].

Величина J именуется ***интегралом Римана*** функции f по множеству V; функция f — ***интегрируемой по Риману*** на V.

Теорема 6.3. Функция f, непрерывная на замкнутом ограниченном множестве V, интегрируема по Лебегу на этом множестве. При этом, интеграл Лебега I функции равен интегралу Римана J.

Доказательство. Функция f измерима на V (***теорема 4.7***) и ограничена; следовательно, функция интегрируема по Лебегу (***теорема 5.3***). Выберем какую-либо последовательность разбиений $\{\tau_n\}$ такую, что $\lambda(\tau_n) \to 0$ и составим суммы Дарбу S_n^*, s_n^*. Очевидно, они равны суммам Дарбу–Лебега, составленным для разбиения τ_n. Если $I_{(-)}(f)$ и $I_{(+)}(f)$ соответственно — точная верхняя граница нижних сумм Дарбу–Лебега и точная нижняя граница верхних сумм Дарбу–Лебега (см. **§ 5**), то $s_n^* \le I_{(-)}(f) \le I \le I_{(+)}(f) \le S_n$. Так как, в силу ***теоремы 6.2***, существуют $\lim s_n^* = \lim S_n^* = J$, то остается признать, что $I = J$.

Отказ от условия непрерывности функции, вообще говоря, приводит к тому, что интегральные суммы функции S_n теряют смысл, или же предел последовательности $\{S_n\}$ зависит от способа построения S_n. В таких случаях функция не интегрируема по Риману. Однако, это не исключает интегрируемости функции по Лебегу.